MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Gabarito da Segunda Prova — 16/10/2017

Tipo de Prova	Gabarito
○ ● ○ ● ○ ○ ● ○	b – a – a – e – c – c – a – d
○ ● ○ ● ○ ○ ● ●	e – b – c – e – d – b – b – b
● ● ○ ● ○ ○ ● ○	c – e – b – e – d – d – d – e
● ● ○ ● ○ ○ ● ●	c – c – c – e – a – b – a – c

SOLUÇÕES PARA UM DOS TIPOS DE PROVA

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função e seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ um ponto. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem, então f é contínua em (x_0, y_0).

(II) Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem.

(III) Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem em $\mathbb{R}^2$ e são contínuas em (x_0, y_0), então f é diferenciável em (x_0, y_0).

(IV) Se $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ existe para todo versor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em (x_0, y_0).

Assinale a alternativa correta.

a. Apenas as afirmações (I) e (IV) são verdadeiras.

b. Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

c. Apenas as afirmações (II), (III) e (IV) são verdadeiras.

d. Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

e. Apenas as afirmações (II) e (IV) são verdadeiras.

Solução. A afirmação (I) é falsa, como enfatizado em aula e no exercício 1.4 da Lista 2.

A afirmação (II) é verdadeira: as derivadas parciais são utilizadas na definição de diferenciabilidade de uma função.

A afirmação (III) é verdadeira: é o teorema que garante a diferenciabilidade de funcções de classe $\mathcal{C}^1$.

A afirmação (IV) é falsa, também enfatizado em aula e ilustrado com o exercício 5.4 da Lista 2.

Resposta correta: **b.**

2. Suponha que no ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tenha derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$ para todo versor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Assinale a alternativa correta.

a. A função f não é necessariamente diferenciável em (x_0, y_0) e nem é necessariamente contínua em (x_0, y_0).

b. A função f admite necessariamente derivadas parciais em (x_0, y_0) e vale $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$ para todo versor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

c. A função f é necessariamente diferenciável em (x_0, y_0).

d. A função f admite necessariamente derivadas parciais em (x_0, y_0) e é necessariamente contínua em (x_0, y_0).

e. A função f não admite necessariamente derivadas parciais em (x_0, y_0).

Solução. A alterativa **a.** é a correta. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

não é contínua (e portanto não diferenciável) em $(0, 0)$ e admite derivadas direcionais em $(0, 0)$, para todo versor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

A alterativa **b.** é falsa, o exercício 5.3 da Lista 2 é um contra-exemplo.

A alterativa **c.** é falsa, novamente o exercício 5.4 da Lista 2 é um contra-exemplo.

A alterativa **d.** é falsa, pois apesar de as derivadas parciais existirem (são casos particulares da derivada direcional), a função não precisa ser contínua.

A alterativa **e.** é falsa, pois as derivadas parciais são casos particulares das derivadas direcionais, quando $\vec{u} = \vec{e}_1$ ou $\vec{u} = \vec{e}_2$.

Resposta correta: **a.**

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Suponha que exista $n > 1$ tal que $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo $t \neq 0$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Então, para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, vale

a. $(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = nf(x_0, y_0)$.

b. $(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = n^2 f(x_0, y_0)$.

c. $(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = 0$.

d. $(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = x_0 f(x_0, y_0) + y_0 f(x_0, y_0)$.

e. $(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = x_0^n f(x_0, y_0) + y_0^n f(x_0, y_0)$.

Solução. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixado, derivando a expressão $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ em relação a t vem que

$$\nabla f(tx, ty) \cdot (x, y) = nt^{n-1} f(x, y), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Em $t = 1$ e (x_0, y_0) obtemos

$$(x_0, y_0) \cdot \nabla f(x_0, y_0) = nf(x_0, y_0).$$

Resposta correta: **a.**

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

(I) f é contínua em $(0, 0)$.

(II) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existem.

(III) f é diferenciável em $(0, 0)$.

(IV) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}$ para todo versor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

Assinale a alternativa correta.

a. Apenas as afirmações (I), (II) e (IV) são verdadeiras.

b. Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

c. Apenas as afirmações (III) e (IV) são verdadeiras.

d. Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

e. Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Solução. A afirmação (I) é verdadeira, pois, para $(x, y) \neq (0, 0)$, f é soma de dois produtos de uma função limitada com uma que tende a zero na origem, sendo então seu limite igual ao valor da função naquele ponto.

A afirmação (II) é verdadeira: segue diretamente da definição que $f_x(0, 0) = 0$ e $f_y(0, 0) = 1$.

A afirmação (III) é falsa: o limite para testar a diferenciabilidade de f na origem é

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^4+k^3}{h^2+k^2} - 0 - 0h - 1k}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

o qual não se anula ao longo da curva $\gamma(t) = (t, t)$.

A afirmação (IV) é falsa, basta inspirar-se na curva que desmente a afirmação (III) e considerar o vetor $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, obtendo $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = 1 \neq \sqrt{2}2 = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{u}$.

Resposta correta: **e.**

5. Suponha que o plano tangente ao gráfico da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, no ponto $(1, 1, f(1, 1))$, seja dado por $z = x + 2y - 1$. Se a curva $\gamma(t) = (t^2, \sqrt{t}, a + bt^3 + ct^6)$, $t > 0$, está no gráfico de f, então

a. $a - c = -1$.

b. $a - c = 0$.

c. $a - c = 1$.

d. $a - c = 2$.

e. $a - c = 3$.

Solução. A hipótese $\mathrm{Im}(\gamma) \subseteq \mathrm{graf} f$ implica que

$$f(t^2, \sqrt{t}) = a + bt^3 + ct^6. \tag{1}$$

Derivando ambos os lados em relação a t obtemos

$$\nabla f(t^2, \sqrt{t}) \cdot (2t, \frac{1}{2\sqrt{t}}) = 3bt^2 + 6ct^5. \tag{2}$$

Da equação do plano tangente temos que $\nabla f(1, 1) = (1, 2)$ e que $f(1, 1) = 2$ (o ponto de tangência satisfaz a equação do plano).

Em $t_0 = 1$ as equações (1) e (2) tornam-se

$$\begin{cases} a + b + c = & 2 \\ b + 2c = & 1 \end{cases},$$

donde $a - c = 1$.

Resposta correta: **c.**

6. Seja $f(x, y)$ uma função real de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e seja $g(u, v)$ a função definida por

$$g(u, v) = uf\left(u^2 + v^2, \frac{u}{v}\right), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } v > 0.$$

Assinale a alternativa correta. OBS: abaixo, as derivadas parciais de g são calculadas em (u, v) e as derivadas parciais de f são calculadas em $\left(u^2 + v^2, \frac{u}{v}\right)$.

a. $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 2u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2}{v}\frac{\partial f}{\partial y} + 4\frac{u^2}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4u^3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

b. $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 4u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2}{v}\frac{\partial f}{\partial y} + 2\frac{u^2}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 4u^3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{u}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

c. $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 2v\frac{\partial f}{\partial x} + 4u^2v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(2u - 2\frac{u^3}{v^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{u^2}{v^3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

d. $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 2v\frac{\partial f}{\partial x} + 4u^2v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(2u - \frac{u^3}{v^2}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - 2\frac{u}{v^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{u^2}{v^3}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

e. $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 4uv^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{u^2}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2u\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2u^2}{v^3}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{u^3}{v^4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Solução. Aplicando as regra de derivação (produto e cadeia), omitindo os pontos de aplicação, obtemos:

$$g_u = f + 2uf_x + \frac{1}{v}f_y \quad \text{e} \quad g_v = u(2vf_x - \frac{u}{v^2}f_y).$$

Derivando mais uma vez, obtemos as derivadas de segunda ordem de g:

$$g_{uu} = \frac{2vf_y + u\left(f_{yy} + 2v\left(3vf_x + 2u\left(f_{xy} + uvf_{xx}\right)\right)\right)}{v^2}$$
$$g_{uv} = 4u^2vf_{xx} + (2u - \frac{2u^3}{v^2})f_{xy} - \frac{2uf_y}{v^2} + 2vf_x - \frac{u^2f_{yy}}{v^3}$$
$$g_{vv} = \frac{u\left(2uvf_y + u^2f_{yy} + 2v^3\left(vf_x - 2uf_{xy} + 2v^3f_{xx}\right)\right)}{v^4}.$$

Resposta correta: **c.**

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um função diferenciável. Suponha que a curva $\gamma(t) = (t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$, seja uma parametrização da curva de nível $f = 8$. Suponha que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$ contenha o ponto $(2, 2, 1)$. Considere os vetores unitários $\vec{u}_1 = (1, 0)$ e $\vec{u}_2 = \frac{1}{5}(3, 4)$. Então $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(1, 1)$ é igual a

a. $-\frac{112}{5}$.

b. $\frac{26}{5}$.

c. $\frac{13}{5}$.

d. $-\frac{92}{5}$.

e. $\frac{105}{5}$.

Solução. A equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, f(1, 1))$ é

$$f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) - z + f(1, 1) = 0.$$

As informações do enunciado nos dizem respectivamente que

$$f(t^2, t^3) = 8, \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f_x(1, 1) + f_y(1, 1) + 7 = 0,$$

já que $t = 1$ nos dá $f(1, 1) = 8$.

Derivando a primeira equação em relação a t no ponto $t_0 = 1$ a obtemos então o sistema:

$$\begin{cases} 2f_x(1, 1) + 3f_y(1, 1) & = 0 \\ f_x(1, 1) + f_y(1, 1) & = -7 \end{cases},$$

cuja solução nos dá $\nabla f(1, 1) = (-21, 14)$ e, como f é diferenciável,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(1, 1) + \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(1, 1) &= \nabla f(1, 1) \cdot \vec{u}_1 + \nabla f(1, 1)\vec{u}_2) \\ &= \nabla f \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \\ &= \frac{1}{5}(-21, 14) \cdot (8, 4) \\ &= \frac{-112}{5}. \end{aligned}$$

Resposta correta: **a.**

8. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que a reta normal ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada por $\{(3, 2, 1) + \lambda(-2, 3, 1), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Assinale a alternativa cuja curva não pode ser a curva de nível de f contendo o ponto (x_0, y_0).

a. $\gamma(t) = (t^3, t^2 + 2t + 1), t \in \mathbb{R}$.

b. $\gamma(t) = (\sin t, \cos t + 1), t \in [0, 2\pi]$.

c. $\gamma(t) = (t^5, t^3 + 2t), t \in \mathbb{R}$.

d. $\gamma(t) = (2\tan t, t), t \in]-\pi/2, \pi/2[$.

e. $\gamma(t) = (e^t, t^2 - 3), t \in \mathbb{R}$.

Solução. Das hipóteses dadas no enunciado temos que $\nabla f(x_0, y_0) = (2, -3)$. A curva de nível de f que passa por (x_0, y_0) deve ter seu vetor tangente ortogonal ao gradiente neste ponto: $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$, onde $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$. Para cada uma das alternativas esta equação torna-se:

a. $t_0^2 - t_0 - 1 = 0$, donde $t_0 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, portanto existem dois pontos dessa curva com a propriedade desejada.

b. $2\cos t_0 - 3\sin t_0 = 0$, que tem soluções reais e portanto existem pontos na curva com a propriedade desejada.

c. $10t_0^4 - 9t_0^2 - 6 = 0$, que também tem duas soluções reais.

d. $4\sec^2 t_0 - 3 = 0$, que não tem soluções, pois $sect \geq 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Isso mostra que não existe vetor tangente à esta curva que seja ortogonal a $\nabla f(x_0, y_0)$, são podendo então ser uma curva de nível de f.

e. $2e^{t_0} - 6t_0 = 0$, que tem duas soluções reais (use o TVM e o TVI para ver isso).