CATALOG

MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Terceira Prova — 04/12/2017

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ________________________ **NUSP:** __________ **Turma:** __________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto. Carteiras, estojos, mochilas e blusas devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar desligados.
2. Preencha à tinta, e de maneira legível, todos os campos acima.
3. As questões dissertativas podem ser feitas à tinta (azul ou preta) ou à lápis.
4. Só será considerado na correção das questões dissertativas o que estiver na folha com seu enunciado.
5. Mantenha a organização, limpeza e legibilidade na redação da(s) questão(ões) dissertativas, **justificando todas as suas afirmações**.
6. Preencha, à tinta e completamente, os campos para as alternativas de cada teste.
7. Assinale apenas uma alternativa por questão. Em caso de erro, indique expressamente qual alternativa deve ser considerada na capa da prova, ao lado da questão correspondente.
8. Esta prova tem duração máxima de 2 horas e o tempo mínimo de permanência na sala é de 30 minutos.
9. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para esta folha.
10. Confira a integridade do seu caderno de questões de acordo com o número de testes e questões dissertativas indicados abaixo.

Assinatura: ______________________________

Teste 1 [`intsup1`] A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na interseção das superfícies $x^2 + y^2 = 2$ e $x^2 + y^2 + z^3 = 3$. Se $\gamma(t_0) = (1,1,1)$ e $\gamma'(t_0) \neq 0$, a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$ é dada pela equação:

- [A] $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(0,6,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- [B] $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(6,6,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- [C] $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(6,6,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- [D] $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(0,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ■ $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(-1,1,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teste 2 [`intsup2`] A imagem da curva $\gamma(t)$ está contida na interseção das superfícies $y^2 + z^2 = 2$ e $x^2 + y^2 + z^3 = 3$. Se $\gamma(t_0) = (1,1,1)$ e $\gamma'(t_0) \neq 0$, a reta tangente a γ em $\gamma(t_0)$ é dada pela equação:

- [A] $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(0,6,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- [B] $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(6,6,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- [C] $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(6,6,6)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ■ $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(0,1,-1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- [E] $(x,y,z) = (1,1,1) + \lambda(-1,1,0)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teste 3 [`hess1`] Sobre a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{k}{3}x^2 - \frac{y^2}{2} + xy + x,$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, considere as seguintes afirmações:

(I) Para todo $k \in \mathbb{R}$, f tem exatamente um ponto crítico.

(II) Para todo $k \in \mathbb{R}$, f não tem pontos de mínimo local.

(III) f tem um único ponto de sela se, e somente se, $k > -\frac{3}{2}$.

(IV) Para $k = -2$, $\frac{3}{2}$ é um máximo local de f.

São verdadeiras:

- [A] todas as afirmações.
- ■ apenas as afirmações (II), (III) e (IV).
- [C] apenas as afirmações (I) e (III).
- [D] apenas as afirmações (I), (III) e (IV).
- [E] apenas as afirmações (III) e (IV).

Teste 4 [`hess2`] Sobre a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{k}{3}x^2 - y^2 + 2xy + x,$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$, considere as seguintes afirmações:

(I) Para todo $k \in \mathbb{R}$, f tem exatamente um ponto crítico.

(II) Para todo $k \in \mathbb{R}$, f não tem pontos de mínimo local.

(III) f tem um único ponto de sela se, e somente se, $k > -3$.

(IV) Para $k = -4$, $\frac{3}{4}$ é um máximo local de f.

São verdadeiras:

A todas as afirmações.
■ apenas as afirmações (II), (III) e (IV).
C apenas as afirmações (I) e (III).
D apenas as afirmações (I), (III) e (IV).
E apenas as afirmações (III) e (IV).

Teste 5 [`convex`] Sejam $U \subset \mathbb{R}^3$ aberto e $f, g : U \to \mathbb{R}$ funções deriváveis. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $\nabla f = \nabla g$, então $f = g$.

(II) Se $\nabla f = \nabla g$, então $f - g$ é constante.

(III) Se $\nabla f = \nabla g$ e U é *convexo*, i.e. se dois pontos pertencerem a U o segmento que os une está contido em U, então $f - g$ é constante.

(IV) $f + g$ e fg são deriváveis.

São verdadeiras:

A todas as afirmações.
B nenhuma das afirmações.
C apenas a afirmação (IV).
■ apenas as afirmações (III) e (IV).
E apenas as afirmações (II), (III) e (IV).

Teste 6 [`lagrR32r1`] Sejam m e n, respectivamente, as distâncias máxima e mínima entre os pontos que estão na interseção das superfícies

$$2x - z = 0 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

e a origem. É correto afirmar que:

A m e n não existem.
B $m = 5$ e $n = 1$.
C $m = \sqrt{5}$ e $n = 2$.
■ $m = \sqrt{5}$ e $n = 1$.
E $m = 1/2$ e $n = 1/5$.

Teste 7 [`lagrR32r2`] As distância máxima e mínima entre os pontos que estão na interseção das superfícies

$$2x - z = 0 \qquad \text{e} \qquad 2x^2 + y^2 = 1$$

até a origem são dadas respectivamente por

- [A] m e n não existem.
- [B] $m = 5/2$ e $n = 1$.
- ■ $m = \sqrt{5/2}$ e $n = 1$.
- [D] $m = 2$ e $n = \sqrt{5/2}$.
- [E] $m = 1$ e $n = \sqrt{2/5}$.

Questão 1 (Valor: 2,0 pontos). Sejam $f(x,y) = e^{x+5y}$ e $P_1(x,y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em volta de $(0,0)$.

a. Mostre que para todo (x,y), com $x+5y<1$,

$$|e^{x+5y} - P_1(x,y)| < \frac{3}{2}(x+5y)^2.$$

b. Determine $e^{0,06}$ com precisão até a segunda casa decimal. Justifique.

a. Se $P_1(x,y)$ é o polinômio de Taylor de ordem 1 para f em volta de $(0,0)$ e $E_1(x,y)$ é seu resto de Lagrange, temos

$$|e^{x+5y} - P_1(x,y)| < |E_1(x,y)|, \text{ onde}$$

$E_1(x,y) = \frac{1}{2}\left[f_{xx}(\bar{x},\bar{y})\,x^2 + 2f_{xy}(\bar{x},\bar{y})\,xy + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})\,y^2\right]$, para algum $(\bar{x},\bar{y})$ no interior do segmento ligando (x,y) a $(0,0)$. Como $f_x(x,y) = e^{x+5y}$, $f_y(x,y) = 5e^{x+5y}$, $f_{xx}(x,y) = e^{x+5y}$, $f_{xy}(x,y) = 5e^{x+5y}$ e $f_{yy}(x,y) = 25\,e^{x+5y}$ segue que

$$|E_1(x,y)| = \frac{e^{\bar{x}+5\bar{y}}}{2}\cdot(x+5y)^2. \quad (*)$$

O conjunto $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+5y<1\}$ é convexo e portanto todo segmento ligando $(0,0)\in D$ e $(x,y)\in D$ está contido em D, logo $(\bar{x},\bar{y})$ em $(*)$ satisfaz $\bar{x}+5\bar{y}<1$ e portanto

$$|E_1(x,y)| < \frac{e}{2}(x+5y)^2 < \frac{3}{2}(x+5y)^2, \text{ como desejado.}$$

b. Do item anterior temos que se (x,y) satisfaz $x+5y<1$ temos $|E_1(x,y)| < \frac{3}{2}(x+5y)^2$.

Em particular, $|E_1(0{,}01;\,0{,}01)| < \frac{3}{2}\cdot 0{,}06^2 = 0{,}0054 < 10^{-2}$.

Portanto $|\underset{f(0,01;\,0,01)}{\underbrace{e^{0,06}}} - P_1(0{,}01;\,0{,}01)| < 10^{-2}$, ou seja, $e^{0,06} \approx P_1(0{,}01;\,0{,}01) = 1{,}06$, com precisão até a segunda casa decimal.

Questão 2 (Valor: 2,0 pontos). Dados $a, b, c > 0$, considere a família de todos os tetraedros delimitados pelos planos coordenados e por um plano tangente ao elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ num ponto do primeiro octante. Encontre, caso existam, o máximo e o mínimo volume dos tetraedros dessa família.

O elipsóide em questão é a imagem inversa $g^{-1}(1)$, onde $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, que é de classe C^1 e seu gradiente só é nulo na origem, que não pertence ao elipsóide, logo $\nabla g(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $\forall (x,y,z) \in g^{-1}(1)$. Assim está bem definido o plano tangente a $g^{-1}(1)$ em cada um de seus pontos. Se $(x_0, y_0, z_0) \in g^{-1}(1) \cap (0,+\infty)^3$ (um ponto do elipsóide no primeiro octante), tal plano é dado pela equação $\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$, ou simplesmente, $\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} + \frac{z z_0}{c^2} = 1$. Este plano intersecta os eixos coordenados nos pontos $\left(\frac{a^2}{x_0}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{b^2}{y_0}, 0\right)$ e $\left(0, 0, c^2/z_0\right)$, donde o tetraedro em questão tem volume $V(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$. Queremos então encontrar os valores máximo e mínimo da função $V: (0,+\infty)^3 \to \mathbb{R}$ dada por $V(x,y,z) = \frac{a^2b^2c^2}{xyz}$, sujeito a restrição $g^{-1}(1) \cap (0,+\infty)^3$, o que equivale a encontrar, respectivamente, o mínimo e o máximo de $f(x,y,z) = xyz$ com a mesma restrição. Sendo f contínua, sua restrição ao compacto $[0,+\infty)^3 \cap g^{-1}(1)$ assume máximo e mínimo (Teorema de Weierstrass). Como $f(x,y,z) \geq 0$, $\forall (x,y,z) \in [0,+\infty)^3 \cap g^{-1}(1)$ e se anula nos planos coordenados (onde assume mínimo) temos que $V(x,y,z)$ não assume máximo em $(0,+\infty)^3 \cap g^{-1}(1)$. Assim o máximo de f é assumido (que é o mínimo de V) em $(0,+\infty)^3 \cap g^{-1}(1)$. Estamos com as hipóteses do teorema dos multiplicadores de Lagrange para funções a 3 variáveis e 1 restrição, e portanto no ponto de máximo de f restrita a $(0,+\infty)^3 \cap g^{-1}(1)$ devemos ter $\{\nabla f(p), \nabla g(p)\}$ linearmente dependente e $g(p) = 1$. Se $p = (x,y,z)$ isto equivale a $xyz\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right) \wedge 2\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right) = (0,0,0)$ e $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, ou seja, $(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a,b,c)$, sendo então o único de máximo de f em $(0,+\infty)^3 \cap g^{-1}(1)$, consequentemente o único mínimo de V, restrita ao mesmo conjunto. Deste modo o volume mínimo é $V = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{abc/3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}abc$.

Folha de Respostas

Respostas ilegíveis ou não indicadas nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________ **NUSP:** ________ **Turma:** ________

Por favor coloque seu número USP nos campos abaixo. Caso tenha menos de 8 dígitos deixe as últimas colunas em branco.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Por favor coloque sua turma nos campos abaixo.

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9

Respostas:

Teste 1:	A	B	C	D	■
Teste 2:	A	B	C	■	E
Teste 3:	A	■	C	D	E
Teste 4:	A	■	C	D	E
Teste 5:	A	B	C	■	E
Teste 6:	A	B	C	■	E
Teste 7:	A	B	■	D	E