Questão 1 (Valor: 3.0 pontos). Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2y^3}{x^2+y^2} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a. Determine, caso existam, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b. A função f é diferenciável em $(0,0)$?

c. Determine, caso exista, a derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$, para $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

<u>Questão 1</u>

a. $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h^3} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h^3}{h^3} = 2$$

b. Não, a função não é diferenciável em $(0,0)$ pois $\nabla f(0,0) \cdot (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = (1,2)(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = 3\sqrt{2}/2$ é diferente de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$ (ver item c.)

c. $$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h\sqrt{2}/2, h\sqrt{2}/2) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^3\sqrt{2}/4}{2h^3 2/4} = \lim_{h \to 0} 3\sqrt{2}/4 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Questão 2 (Valor: 2.0 pontos). Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ com plano tangente ao gráfico no ponto $(1,2,g(1,2))$ descrito pela equação

$$4x - 45y + 4z + 60 = 0.$$

a. Determine $g(1,2)$ e $\nabla g(1,2)$.

b. Se $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por $h(x,y,z) = zg(x-y,y)$, determine o plano tangente à superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : h(x,y,z) = -13\}$$

no ponto $(3,2,-2)$.

Questão 2

a) $(1,2,g(1,2))$ está no plano $4x-45y+4z+60=0$.

Logo, $4 - 90 + 4\cdot g(1,2) + 60 = 0$

$\Rightarrow \boxed{g(1,2) = 13/2}$

$\left(\frac{\partial g}{\partial x}(1,2), \frac{\partial g}{\partial y}(1,2), -1\right) \ // \ (4, -45, 4)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = -1 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) = \frac{45}{4}}$

b) Vamos determinar $\nabla h(3,2,-2)$.

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = z\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x-y,y)\cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial y}(x-y,y)\cdot 0\right]$

$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}(3,2,-2) = -2\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(1,2) = 2$

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = z\left[\frac{\partial g}{\partial x}(x-y,y)\cdot(-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(x-y,y)\cdot 1\right]$

$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y}(3,2,-2) = -2\left[\frac{\partial g}{\partial x}(1,2)\cdot(-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,2)\cdot 1\right]$

$= -2\left[(-1)(-1) + \frac{45}{4}(1)\right] = -2 - \frac{45}{2} = \frac{-49}{2}$

$\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = g(x-y,y) \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial z}(3,2,-2) = g(1,2) = 13/2$

Conclusão: $\nabla h(3,2,-2) = \left(2, -\frac{49}{2}, 13/2\right)$

e a equação do plano tangente é:

$(X-3, Y-2, Z+2)\cdot\left(2, -\frac{49}{2}, \frac{13}{2}\right) = 0$

Questão 3 (Valor: 2.0 pontos). Determine, caso existam, os valores máximo e mínimo da função $f(x,y,z) = xy + z$ restrita aos pontos da curva dada pela inteseção do plano $x+y+z=1$ com a esfera unitária $x^2+y^2+z^2=1$.

Questão 3 A inteseção do plano com a esfera é uma elipse, que é um subconjunto fechado e limitado $\mathbb{R}^3$. Logo, f tem máx e min na curva C (teorema de Weierstrass).

Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, temos o sistema:

$$\begin{cases} \det \begin{vmatrix} y & x & 1 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-y)(z+1-x-y)=0 & (I) \\ x^2+y^2+z^2=1 & (II) \\ x+y+z=1 & (III) \end{cases}$$

De (I), $x=y$ ou $z+1-x-y=0$

se $x=y$

$$\begin{matrix} 2x^2+z^2=1 \\ 2x+z=1 \end{matrix} \Rightarrow 2x^2+(1-2x)^2=1 \Rightarrow 2x(3x-2)=0$$

$\Rightarrow x=0$ ou $x=2/3$

$x=y=0 \Rightarrow z=1$ CANDIDATO: $(0,0,1)$

$x=y=2/3 \Rightarrow z=-1/3$ CANDIDATO: $(2/3, 2/3, -1/3)$

se $z+1-x-y=0$

$$\left.\begin{matrix} z=x+y-1 \\ \text{e } z=1-x-y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x+y=1 \text{ e} \\ z=0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ \text{e } x^2+y^2=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2+(1-x)^2=1 \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=1$$

$x=0 \Rightarrow y=1$ CANDIDATO: $(0,1,0)$

$x=1 \Rightarrow y=0$ CANDIDATO $(1,0,0)$

COMPARANDO OS CANDIDATOS:

$f(0,0,1) = +1$; $f(2/3, 2/3, -1/3) = 1/9$

$f(0,1,0) = 0$; $f(1,0,0) = 0$

Logo, $(0,0,1)$ é max de f em C e $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$ são mínimos de f em C.

Questão 4 (Valor: 3.0 pontos). Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y - xy + 4y^3$.

a. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

b. Determine, se houver, os pontos de máximo e mínimo de f restrita ao conjunto

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le x \text{ e } 0 \le x \le 1\}.$$

Questão 4

a.) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy - y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - x + 12y^2$

$2xy - y = 0 \iff y(2x-1) = 0 \iff y = 0$ ou $x = 1/2$

se $y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff x = 1$ ou $x = 0$

se $x = 1/2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \iff y = \pm \frac{1}{4\sqrt{3}}$

Pontos críticos: $(0,0)$, $(1,0)$, $(1/2, \pm 1/4\sqrt{3})$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x - 1$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 24y$

$H(0,0) = \det \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow (0,0)$ é <u>ponto de sela</u>

$H(1,0) = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow (1,0)$ é <u>ponto de sela</u>

$H(1/2, 1/4\sqrt{3}) = \det \begin{vmatrix} 1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 6/\sqrt{3} \end{vmatrix} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/2, 1/4\sqrt{3}) > 0$

$\Rightarrow (1/2, 1/4\sqrt{3})$ é ponto de <u>mínimo local</u>

$H(1/2, -1/4\sqrt{3}) = \det \begin{vmatrix} -1/2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -6/\sqrt{3} \end{vmatrix} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1/2, -1/4\sqrt{3}) < 0$

$\Rightarrow (1/2, -1/4\sqrt{3})$ é ponto de <u>máximo local</u>

Questão 4 (Valor: 3.0 pontos). Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2y - xy + 4y^3$.

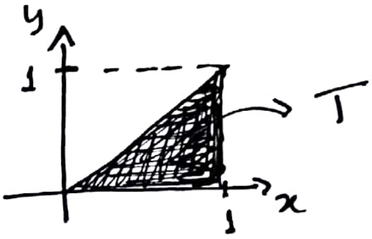
a. Determine os pontos críticos de f e classifique-os.

b. Determine, se houver, os pontos de máximo e mínimo de f restrita ao conjunto

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}.$$

Questão 4b

$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq x \text{ e } 0 \leq x \leq 1\}$



Os pontos de máximo e mínimo de f em T podem ser:

1) pontos da fronteira de T ou

2) pontos críticos de f no interior de T

1) Análise de f nos pontos da fronteira de T

(1,1)
$x = y$
$0 \leq x \leq 1$
(0,0)

$f(x,x) = 5x^3 - x^2$

candidatos a máx e min de $g(x) = 5x^3 - x^2$ para $x \in [0,1]$:

$x = 0$: $g(0) = 0 \Rightarrow f(0,0) = 0$

$x = 1$: $g(1) = 4 \Rightarrow f(1,1) = 4$

$x = 2/15$ (pois $g'(2/15) = 0$) : $g(2/15) = f(2/15, 2/15) = -20/15^3$

(0,0) (1,0)
$y = 0$
$0 \leq x \leq 1$

$f(x,0) = 0, \ \forall x \in [0,1]$

(1,1)
$x = 1$
$0 \leq y \leq 1$
(1,0)

$f(1,y) = 4y^3$ → max em $y = 1$: $f(1,1) = 4$
→ min em $y = 0$: $f(1,0) = 0$

2) Pontos críticos de f no interior de T, calculados em 4a. O único ponto é $(1/2, 1/4\sqrt{3})$

$f(1/2, 1/4\sqrt{3}) = -1/24\sqrt{3}$

CONCLUSÃO: PONTO DE MÁX DE f EM T É $(1,1)$
VALOR MÁX DE f EM T É $f(1,1) = 4$
PONTO DE MIN DE f EM T É $(1/2, 1/4\sqrt{3})$
VALOR MIN DE f EM T É $f(1/2, 1/4\sqrt{3}) = -1/24\sqrt{3}$