Um problema de Otimização com Restrições

MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Problema. Dentre todos os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo $y^2 = x(x+1)^2$, determine, caso exista, aquele mais próximo de $(-2, 0)$.

Antes de atacar diretamente o problema vamos discutir a existência da solução e também porque o máximo dessa distância não existe. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a distância de (x, y) a $(-2, 0)$ é dada pela função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de expressão

$$f(x, y) = (x+2)^2 + y^2,$$

que é claramente diferenciável. A curva descrita pela restrição

$$y^2 = x(x+1)^2$$

não é limitada, pois $x \geq -1$ e, para cada tal x existem dois pontos da curva com essa abscissa. Assim, apesar da função f ser contínua, o conjunto definido pela restrição não é compacto e portanto não podemos utilizar o teorema de Weierstrass para garantir existência de solução para o problema. Devido às considerações acima sobre a restrição, a distância de um ponto (x, y) da curva ao ponto $(-2, 0)$ pode ser arbitrariamente grande. Por outro lado, o mínimo existe, uma vez que restringindo a curva ao interior de bolas fechadas centradas em $(-2, 0)$ temos conjuntos compactos, onde f assume máximo e mínimo. Diminuindo o raio dessas bolas o ponto de mínimo obtido é sempre o mesmo.

Denotando por C o conjunto definido pela restrição do problema, isto é,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x(x+1)^2\},$$

podemos escrever $C = g^{-1}(0)$, onde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x, y) = y^2 - x(x+1)^2$ é uma função diferenciável. Sabemos, do teorema dos multiplcadores de Lagrange, que uma solução (x_0, y_0) para o problema deve satisfazer:

(i) $\{\nabla f(x_0, y_0), \nabla g(x_0, y_0)\}$ é linearmente dependente;
(ii) $g(x_0, y_0) = 0$.

A primeira condição acima pode ser expressa de duas maneiras. Se $\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ então ela equivale a

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0), \tag{0.1}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ (chamado de *multiplicador de Lagrange*). Se $\nabla g(x_0, y_0) = \vec{0}$ em geral não existe tal λ (quando existe?) e a dependência linear entre os gradientes é automática.

Lembrando que o vetor gradiente de uma função a duas variáveis é sempre ortogonal às suas curvas de nível vemos, na representação da Figura 1, que tais gradientes são paralelos no ponto $(0, 0)$, pois $\nabla f(0, 0) = (4, 0)$ e $\nabla g(0, 0) = (-1, 0)$ e $g(0, 0) = 0$. Com isso $(0, 0)$ é um candidato a solução do nosso problema.

Observe ainda que $g(-1, 0) = 0$ e $\nabla g(-1, 0) = (0, 0)$, que é linearmente dependente com $\nabla f(-1, 0)$, e portanto $(-1, 0)$ é também um candidato a solução.

Preparado pelo Prof. Alexandre Lymberopoulos — Depto. de Matemática — IME–USP

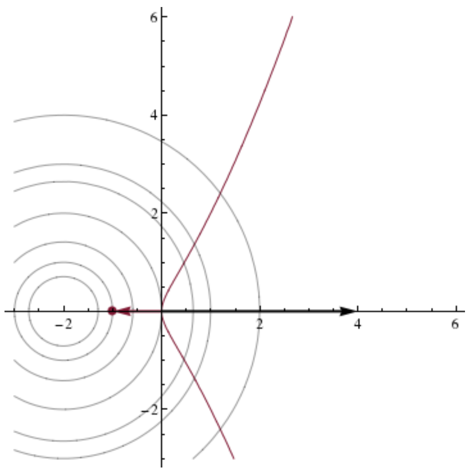

FIGURA 1. Curvas de nível de f e g e seus gradientes num ponto crítico.

Considerando o problema através do gráfico de f, procuramos o ponto "mais baixo" ao longo da imagem da curva $\Gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\Gamma(t) = \big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big),$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ satisfazem $y^2(t) = x(t)\big(x(t)+1\big)^2$.

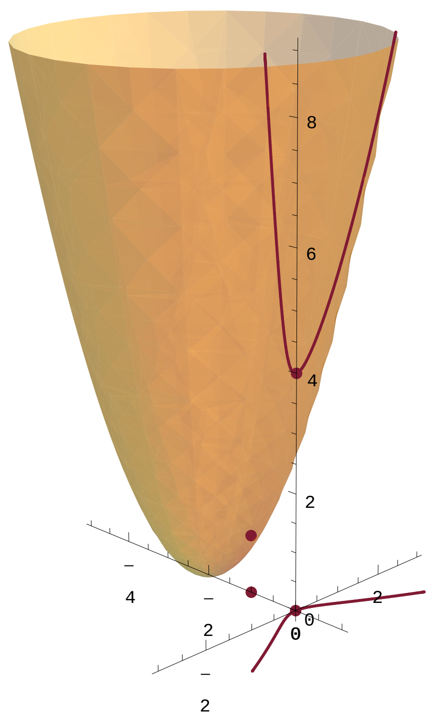

FIGURA 2. Visualizando o problema em termos do gráfico de f.

Calculando os valores de f nos candidatos a solução do problema temos

$$1 = f(-1,0) < f(0,0) = 2,$$

mostrando que o ponto $(-1,0)$ é a solução. Tal fato também poderia ser verificado através da Figura 1.

Neste problema a curva dada pela equação de restrição apresenta um "problema": ela não é regular no ponto $(-1,0)$, onde ∇b se anula. Escrevendo a condição sobre a dependência linear dos gradientes na forma (0.1), perdemos oponto $(-1,0)$ como candidato a solução. De fato, aqui o sistema de Lagrange se escreve

$$\begin{cases} \nabla f(x_0,y_0) & = \lambda \nabla g(x_0,y_0) \\ y_0^2 & = x_0(x_0+1)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} 2(x_0+2) & = -\lambda(x_0+1)(3x_0+1) \\ 2y_0 & = 2\lambda y_0 \\ y_0^2 & = x_0(x_0+1)^2 \end{cases}$$

Se $y_0 \neq 0$ temos $\lambda = 1$ e a primeira equação não tem raízes reais. Logo $y = 0$ e então a terceira equação dá $x_0 = -1$ ou $x_0 = 0$. O valor $x_0 = -1$ torna a primeira equação incompatível, portanto o único candidato a mínimo é $(0,0)$.

A maneira mais geral de representar a dependência linear entre dois vetores do plano é dada pelo determinante de suas coordenadas: os vetores $v = (a,b)$ e $w = (c,d)$ são linearmente dependentes se e somente se $\det(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} =)$. No nosso caso isso corresponde a

$$\det \begin{bmatrix} f_x(x_0,y_0) & f_y(x_0,y_0) \\ g_x(x_0,y_0) & g_y(x_0,y_0) \end{bmatrix} = 0 \implies \det \begin{bmatrix} 2(x_0+2) & 2y_0 \\ -(x_0+1)(3x_0+1) & 2y_0 \end{bmatrix} = 0,$$

ou seja, $4y_0(x_0+2) + 2y_0(x_0+1)(3x_0+1) = 0$. O sistema de Lagrange é

$$\begin{cases} 4y_0(x_0+2) + 2y_0(x_0+1)(3x_0+1) & = 0 \\ y_0^2 - x_0(x_0+1)^2 & = 0. \end{cases}$$

e para $y_0 \neq 0$ temos a primeira equação sem raízes reais, enquanto que $y_0 = 0$ anula a primeira equação e nos dá $x_0 = 0$ ou $x_0 = -1$, produzinho os dois candidatos obtidos geometricamente na Figura 1.