



1. Você deve ter ouvido falar que  $\sqrt{2}$  é um número irracional.
  - a. Demonstre esse fato supondo tal afirmação falsa, ou seja, admitindo que existem inteiros  $p$  e  $q \neq 0$ , primos entre si, tais que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$  e portanto  $2q^2 = p^2$ . O que você pode dizer a respeito da paridades dos dois termos dessa igualdade?
  - b. Determine um número racional  $r$ , tal que  $0 < \sqrt{2} - r < 10^{-5}$ .
  - c. Prove que, se  $p$  é um número primo, então  $\sqrt{p}$  é irracional.
  - d. Mais geralmente, prove que se  $p_1, \dots, p_k$  são primos distintos, então  $\sqrt{p_1 p_2 \dots p_k}$  é irracional.
2. Resolva as inequações:
  - a.  $x(2x-1)(x+1) > 0$
  - b.  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 \leq 0$
  - c.  $(x+1000)^2 \geq x+1000$
  - d.  $|4-x^2| \leq \frac{x+7}{2}$
3. Decida quais afirmações são verdadeiras:
  - a.  $x-1 < 3 \iff (x-1)^2 < 9$
  - b.  $\frac{x-1}{x-2} > 2 \iff \frac{x-2}{x-1} < \frac{1}{2}$
  - c.  $\frac{1}{x} > 3 \iff x < \frac{1}{3}$  e  $x \neq 0$
  - d.  $(x^2-5)^2 < 4(x^2+1)^2 \iff x^2-5 < 2(x^2-1)$
  - e. Se  $x \neq 2$  então  $\frac{x^2+x+1}{x-2} > 3 \iff x^2+x+1 > 3(x-2)$ .
4. Resolva os sistemas e interprete geometricamente:
  - a.  $\begin{cases} xy = x \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$
  - b.  $\begin{cases} y^2 = x+1 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$
5. Esboce os gráficos das funções abaixo:
  - a.  $f(x) = |x|$
  - b.  $f(x) = |x^2 - 4|$
  - c.  $f(x) = |\sin x|$
  - d.  $f(x) = x - |x|$
  - e.  $f(x) = |3x - 5|$
  - f.  $f(x) = 3 \cos 2x$
  - g.  $f(x) = \sqrt{x+3}$
  - h.  $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
  - i.  $f(x) = x^3 - 9$
  - j.  $f(x) = (x+5)^4 - 3$
  - k.  $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2x+6}{x+3}$
  - l.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 5, & \text{se } x = 1. \end{cases}$
  - m.  $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9} + 2$
  - n.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$
  - o.  $f(x) = \sqrt{-x}$
6. Resolva as seguintes inequações:
  - a.  $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$
  - b.  $|x^2 - 4| \geq 2|x^2 - 1|$
7. Esboce (rusticamente) os gráficos de:
  - a.  $f(x) = x \sin x$
  - b.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
  - c.  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$
  - d.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$
  - e.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$
8. Verifique que:
  - a.  $a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ , para todos  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $n$  um inteiro positivo.
  - b.  $x - a = (\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{a})(\sqrt[5]{x^4} + \sqrt[5]{x^3a} + \sqrt[5]{x^2a^2} + \sqrt[5]{xa^3} + \sqrt[5]{a^4})$ , para todos  $a, x \in \mathbb{R}$ .
  - c.  $(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)x} + \sqrt[3]{x^2}) = 1$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
9. Complete as lacunas, usando as fatorações ilustradas no exercício acima<sup>1</sup>:
  - a.  $x-2 = (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2})(\underline{\hspace{2cm}})$ ;
  - b.  $x^2+x = (\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-x+1})(\underline{\hspace{2cm}})$ ;
  - c.  $x^4 = (\sqrt[4]{x^4+1} - 1)(\underline{\hspace{2cm}})$ ;

<sup>1</sup> Esse tipo de fatoração aparecerá como uma ferramenta importante na próxima lista.