**MAT–2453 — Cálculo Diferencial e Integral I — EP–USP**

**Primeira Prova — Gabarito — 09/04/2018**

**1.** Considere a seguinte função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{b(x^2 - 1)}, & x < 1 \\ \dfrac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1}, & x > 1 \\ c, & x = 1 \end{cases}$$

Os valores reais de $b \neq 0$ e $c$ que tornam $f$ contínua em $x = 1$ são:

**a.** $b = -1/2$ e $c = 2$.
**b.** $b = -1/3$ e $c = 2$.
**c.** $b = -1/2$ e $c = 1$.
**d.** $b = -1/4$ e $c = 2$.
**e.** $b = -1/4$ e $c = 1$.
**Resposta: Alternativa d.**

**2.** Seja $f$ uma função derivável num intervalo aberto $I$ que contém 1 e tal que

$$\big(f(x)\big)^3 + x^2 f(x) = 2,$$

para todo $x \in I$. A equação da reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $\big(1, f(1)\big)$ é:

**a.** inexistente.
**b.** $y = x + 2$.
**c.** $y = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$.
**d.** $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$.
**e.** $y = \frac{x}{2} - 1$.
**Resposta: Alternativa c.**

**3.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo a seguinte propriedade

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1.$$

Então podemos afirmar que:

**a.** Existe $m > 0$ tal que, para todo $x < -m$, vale $f(x) > 0$.
**b.** $(1/f)(x)$ está definida para todo $x < 0$.
**c.** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.
**d.** Existe $M > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos $|f(x)| < M$.
**e.** Existe $m > 0$ tal que, para todo $x < -m$, vale $f(x) < 1$.
**Resposta: Alternativa a.**

**4.** Sejam $f, g : \mathbb{R} \to ]0, +\infty[$ tais que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
Então:

**a.** Teremos sempre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
**b.** Teremos sempre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = +\infty$.
**c.** Podemos ter $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = 0$.
**d.** Teremos sempre que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
**e.** Podemos ter $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)g(x) = -\infty$.
**Resposta: Alternativa c.**

**5.** Dada a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Então:

**a.** $f$ é contínua em 0 e é derivável em 0.
**b.** Nenhuma das outras afirmações é verdadeira.
**c.** $f$ não é contínua em 0 e não é derivável em 0.
**d.** $f$ não é contínua em 0 e é derivável em 0.
**e.** $f$ é contínua em 0 e não é derivável em 0.
**Resposta: Alternativa e.**

## Questões Dissertativas

**Questão 1** (Valor: $3,0$)**.** Calcule, caso existam, os seguintes limites:

**a.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2}$;

**b.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$;

**c.** $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\sin(x^2-4)}{\sqrt{x^3-5x^2+8x-4}}$.

*Solução.* **a.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3x^2-4} - \frac{x^2}{3x+2} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(3x+2)-x^2(3x^2-4)}{(3x^2-4)(3x+2)}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3(3x+2)-x^2(3x^2-4)}{(3x^2-4)(3x+2)}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+4x^2}{9x^3+6x^2-12x-8)}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{4}{x}}{9+\frac{6}{x}-\frac{12}{x^2}-\frac{8}{x^3}} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$

**b.**

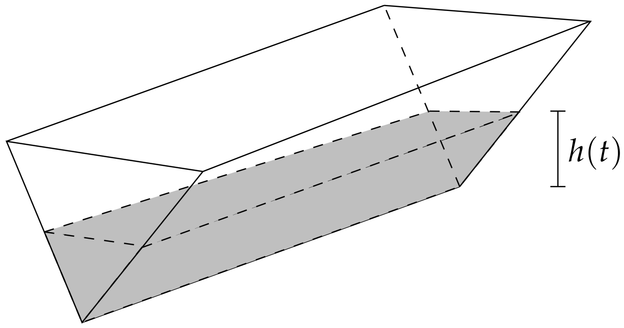
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x - \sin x\cos x}{\cos x}}{x^3}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{x^3\cos x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3\cos x(1+\cos x)}\\
&= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3}_{\to 1} \underbrace{\frac{1}{\cos x(1+\cos x)}}_{\to \frac{1}{2}}\\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**c.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} \frac{\sin(x^2-4)}{\sqrt{x^3-5x^2+8x-4}} &= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}\,\frac{x^2-4}{\sqrt{(x-2)^2(x-1)}}\\
&= \lim_{x\to 2^-} \underbrace{\frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}}_{\to 1}\,\underbrace{\frac{x-2}{|x-2|}}_{\to -1}\,\underbrace{\frac{x+2}{\sqrt{(x-1)}}}_{\to 4}\\
&= -4,
\end{aligned}$$

pois $\lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-2}{-(x-2)} = -1$, uma vez que se $x \to 2^-$ então $x < -2$, isto é, $x-2<0$.

**Questão 2** (Valor: $2,0$)**.** Uma mangueira está enchendo um tanque com água. O tanque tem o formato de um prisma de comprimento 8m cuja base é um triângulo equilátero (ver figura abaixo). Sabendo que a vazão é constante e igual a $5m^3/min$, determine a taxa de variação da altura da água, $h(t)$, no instante em que ela é 2/3m.




*Solução.* Em cada instante de tempo o prisma formado pelo volume de água no tanque é sempre um triângulo isósceles e portanto seus ângulos internos são $\pi/3$. Deste modo, indicando a base relativa à altura $h(t)$ por $b(t)$ temos

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{b(t)}{2h(t)} \implies b(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}h(t).$$

O volume de água no tanque é então

$$V(t) = 8\frac{b(t)h(t)}{2} = 8\frac{\sqrt{3}}{3}h^2(t).$$

Derivando essa igualdade em relação a $t$ obtemos

$$V'(t) = 16\frac{\sqrt{3}}{3}h(t)h'(t).$$

Como em $t_0$ temos que $V'(t_0) = 5$ e $h(t_0) = 2/3$ concluimos com

$$5 = 16\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{2}{3}h'(t_0) \implies h'(t_0) = \frac{15}{32}\sqrt{3}\,m/min.$$

Uma outra solução é:

*Solução.* Usando a semelhança de triângulos entre a seção transversal do tranque e aquela preenchida com o líquido temos que o volume de água em função da altura $h(t)$ no instante de tempo $t$ é

$$V(t) = 8\frac{\big(h(t)2/\sqrt{3}\big)h(t)}{2} = \frac{8}{\sqrt{3}}h^2(t),$$

donde $V'(t) = 16/\sqrt{3}h(t)h'(t)$. Em $t_0$ temos $V'(t_0) = 5$ e $h'(t_0) = 2/3$ e portanto

$$5 = \frac{16}{\sqrt{3}}\frac{2}{3}h'(t_0) \implies h'(t_0) = \frac{15}{32}\sqrt{3}\,m/min.$$