



MAT-2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP-USP
Primeira Prova— 09/09/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: _____ NUSP: _____

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame.** Sobre a carteira deixe apenas *lápiz, borracha, caneta e um documento de identificação com foto*. Mochilas, blusas e demais pertences devem permanecer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 10h40min.
4. Utilize, se necessário, as páginas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Folha de respostas (última): preencha, a tinta e completamente, os campos para seu número USP (deixando as **primeiras colunas em branco**, caso tenha menos de 8 dígitos), bem como o nome e assinatura. Isto deve ser feito **antes** da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento.**
6. Assinale apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, o que deve ser evitado, assinale também a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas, ao lado da questão correspondente.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova.**

Assinatura: _____

BOA PROVA!

© Copyleft — IME-USP

Teste 1 [dom1] Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2}{x^2y^4 + y^2}.$$

É correto afirmar que o domínio de f contém

- ☒ a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$.
- ☐ a reta $y = x + 1$.
- ☐ o círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.
- ☐ a elipse $2(x - 1)^2 + 3y^2 = 1$.
- ☐ a parábola $x = (y - 1)^2 + 1$.

Solução: Sendo numerador e denominador de f funções contínuas, seu domínio exclui os pontos onde o denominador é nulo, ou seja, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^4 + y^2 \neq 0\}$. Mas $x^2y^4 + y^2 = 0$ equivale a $y^2(x^2y^2 + 1) = 0$, o que só ocorre sobre a reta $y = 0$, que intercepta todas as curvas acima, exceto a hipérbole $y^2 - x^2 = 1$.

Teste 2 [dom2] Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2}{x^2y^4 + y^2}.$$

É correto afirmar que o domínio de f contém

- ☒ o círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 3$.
- ☐ a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.
- ☐ a reta $y = x + 1$.
- ☐ a elipse $2(x - 1)^2 + 3y^2 = 1$.
- ☐ a parábola $x = (y - 1)^2 + 1$.

Solução: Sendo numerador e denominador de f funções contínuas, seu domínio exclui os pontos onde o denominador é nulo, ou seja, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^4 + y^2 \neq 0\}$. Mas $x^2y^4 + y^2 = 0$ equivale a $y^2(x^2y^2 + 1) = 0$, o que só ocorre sobre a reta $y = 0$, que intercepta todas as curvas acima, exceto o círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 3$.

Teste 3 [dom3] Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2}{x^2y^4 + y^2}.$$

É correto afirmar que o domínio de f contém

- ☒ a elipse $x^2 + 2(y - 1)^2 = 1$.
- ☐ a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.
- ☐ a reta $y = x + 1$.
- ☐ o círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.
- ☐ a parábola $x = (y - 1)^2 + 1$.

Solução: Sendo numerador e denominador de f funções contínuas, seu domínio exclui os pontos onde o denominador é nulo, ou seja, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^4 + y^2 \neq 0\}$. Mas $x^2y^4 + y^2 = 0$ equivale a $y^2(x^2y^2 + 1) = 0$, o que só ocorre sobre a reta $y = 0$, que intercepta todas as curvas acima, exceto a elipse $x^2 + 2(y - 1)^2 = 1$.

Teste 4 [dom4] Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2}{x^2y^4 + y^2}.$$

É correto afirmar que o domínio de f contém

- ☒ a parábola $y = (x - 1)^2 + 1$.
- ☐ a hipérbole $x^2 - y^2 = 1$.
- ☐ a reta $y = x + 1$.
- ☐ o círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 2$.
- ☐ a elipse $2(x - 1)^2 + 3y^2 = 1$.

Solução: Sendo numerador e denominador de f funções contínuas, seu domínio exclui os pontos onde o denominador é nulo, ou seja, $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^4 + y^2 \neq 0\}$. Mas $x^2y^4 + y^2 = 0$ equivale a $y^2(x^2y^2 + 1) = 0$, o que só ocorre sobre a reta $y = 0$, que intercepta todas as curvas acima, exceto a parábola $y = (x - 1)^2 + 1$.

Teste 5 [nível1] Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 2x + 3y^2 + y}{x^2 + y^2}, \text{ para todo } (x, y) \neq (0, 0).$$

Então

- ☒ a curva de nível 1 de f está contida em uma parábola.
- ☐ a curva de nível 1 de f é uma elipse.
- ☐ a curva de nível 2 de f é uma hipérbole.
- ☐ a curva de nível 2 de f está contida em uma elipse.
- ☐ a curva de nível 2 de f é o conjunto vazio.

Solução: A curva de nível 1 é o conjunto dos pontos (x, y) no domínio de f tais que $f(x, y) = 1$, ou seja, $D_f = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tais que $2x = 2y^2 + y$, uma parábola menos um ponto (a origem). Já a curva de nível 2 consiste dos pontos em D_f que satisfazem, após simplificações, a equação $(x + 1)^2 - (y + 1/2)^2 = 3/4$ (uma hipérbole), exceto a origem.

Teste 6 [nível2] Considere a função

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 2x + 3y^2 + y}{x^2 + y^2}, \text{ para todo } (x, y) \neq (0, 0).$$

Então

- ☒ a curva de nível 2 de f está contida em uma hipérbole.
- ☐ a curva de nível 2 de f é uma elipse.
- ☐ a curva de nível 1 de f é uma parábola.
- ☐ a curva de nível 1 de f está contida em uma elipse.
- ☐ a curva de nível 1 de f é o conjunto vazio.

Solução: A curva de nível 2 é o conjunto dos pontos (x, y) no domínio de f tais que $f(x, y) = 2$, ou seja, $D_f = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tais que, simplificando, $(x + 1)^2 - (y + 1/2)^2 = 3/4$, uma hipérbole menos um ponto (a origem). Já a curva de nível 1 consiste dos pontos em D_f que satisfazem a equação $2x = 2y^2 + y$ (uma parábola), exceto a origem.

Teste 7 [nível3] Considere a função

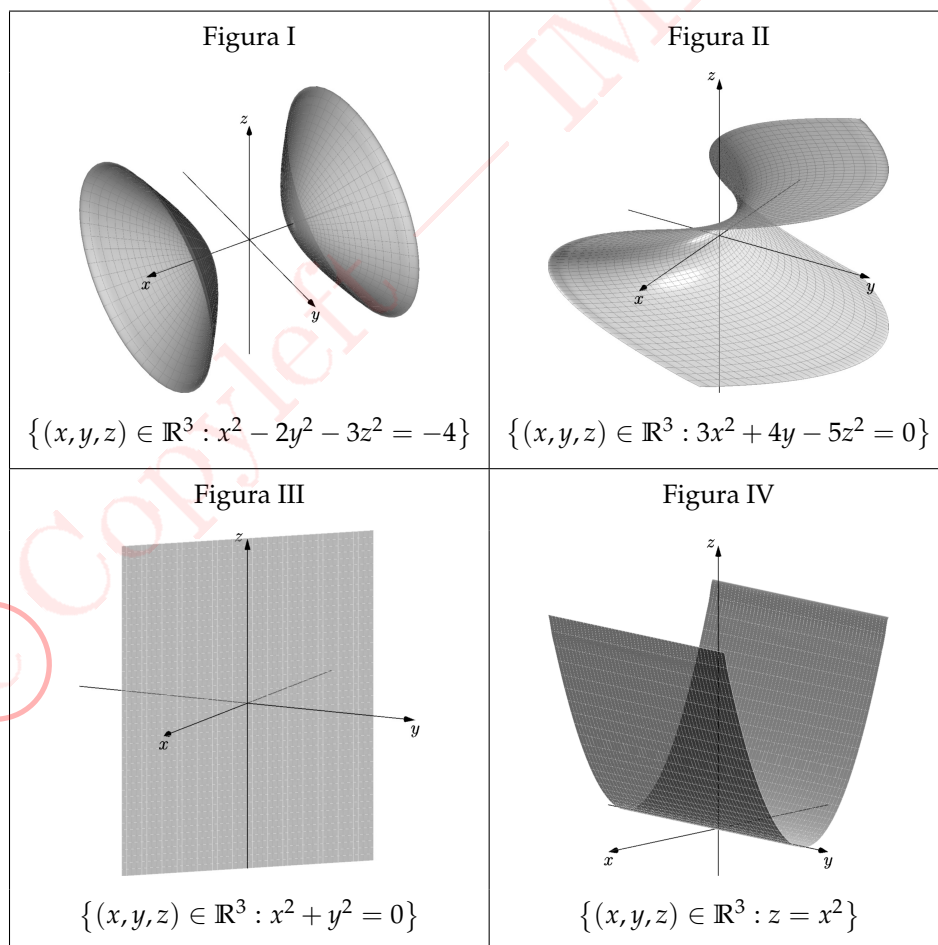
$$f(x, y) = \frac{x^2 - 2x + 3y^2 + y}{x^2 + y^2}, \text{ para todo } (x, y) \neq (0, 0).$$

Então

- ☒ a curva de nível -1 de f está contida em uma elipse.
- ☐ a curva de nível -1 de f é uma hipérbole.
- ☐ a curva de nível 1 de f está contida em uma elipse.
- ☐ a curva de nível 1 de f é uma parábola.
- ☐ a curva de nível 1 de f é o conjunto vazio.

Solução: A curva de nível -1 é o conjunto dos pontos (x, y) no domínio de f tais que $f(x, y) = -1$, ou seja, $D_f = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tais que, simplificando, $2(x - 1/2)^2 + 4(y + 1/8)^2 = 9/16$, uma elipse menos um ponto (a origem). Já a curva de nível 1 consiste dos pontos em D_f que satisfazem a equação $2x = 2y^2 + y$ (uma parábola), exceto a origem.

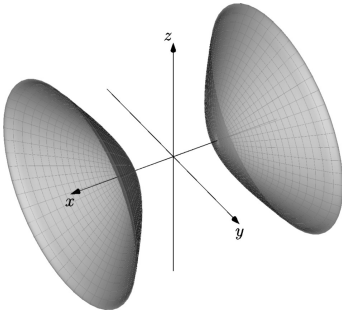
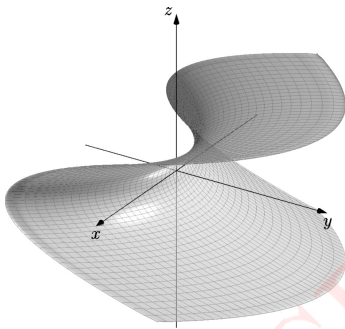
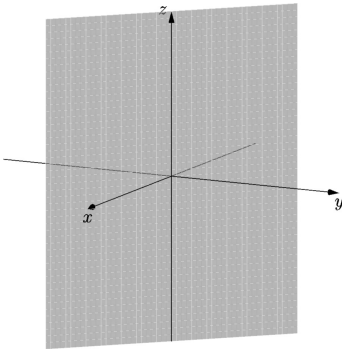
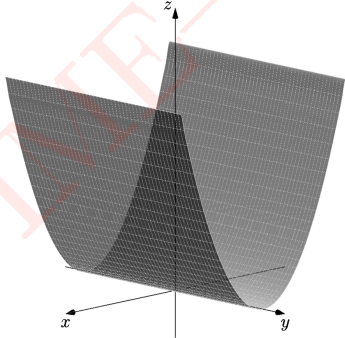
Teste 8 [quad1] Dentre as figuras abaixo aquelas que associam corretamente equação e superfície são:



- ☒ II e IV.
- ☐ I e II.
- ☐ I e III.
- ☐ III e IV.
- ☐ I e IV.

Solução: Segue da análise das equações reduzidas das quádras.

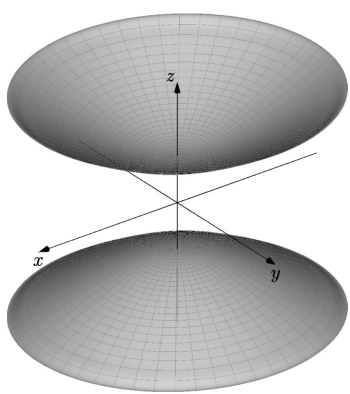
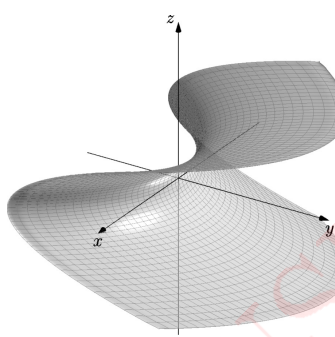
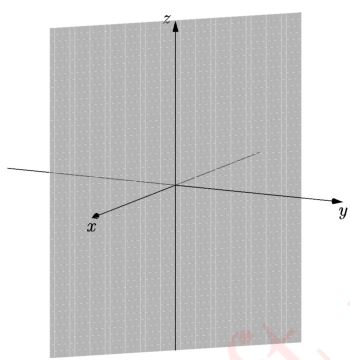
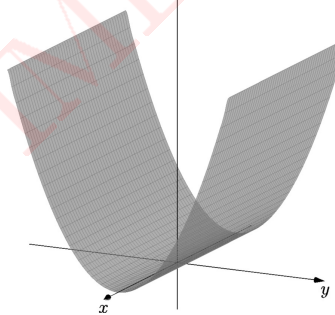
Teste 9 [quad2] Dentre as figuras abaixo aquelas que associam corretamente equação e superfície são:

Figura I  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2y^2 - 3z^2 = -4\}$	Figura II  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 0\}$
Figura III  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$	Figura IV  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2\}$

- ☒ III e IV.
 ☐ I e II.
 ☐ I e III.
 ☐ II e IV.
 ☐ I e IV.

Solução: Segue da análise das equações reduzidas das quádricas.

Teste 10 [quad3] Dentre as figuras abaixo aquelas que associam corretamente equação e superfície são:

Figura I  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -4\}$	Figura II  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 0\}$
Figura III  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 0\}$	Figura IV  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2\}$

- ☒ I e IV.
 ☐ I e II.
 ☐ I e III.
 ☐ II e IV.
 ☐ III e IV.

Solução: Segue da análise das equações reduzidas das quádricas.

Teste 11 [intsup1] A reta tangente à curva dada pela intersecção das superfícies $2x^2 - y^2 + 4z^2 = 7$ e $x + y = 1$ no ponto $(-1, 2, 3/2)$ é paralela ao vetor

☐ (1, -1, 0).

☐ (2, -1, 0).

☐ (-1, 2, 0).

☐ (1, 0, -1).

☐ (1, 0, -2).

Solução: Substituindo a equação do plano na do hiperbolóide, temos: $2x^2 - (1 - x)^2 + 4z^2 = 7$ ou, completando quadrados, $(\frac{x+1}{3})^2 + (\frac{z}{3/2})^2 = 1$. Para cada (x, z) que verifica a equação, existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que

$$x(t) = -1 + 3 \cos t, \quad z(t) = \frac{3}{2} \sin t \quad \text{e} \quad y(t) = 2 - 3 \cos t.$$

O ponto $P = (-1, 2, 3/2)$ é atingido quando $t = \pi/2$ e ali o vetor tangente à curva é $(x'(\pi/2), y'(\pi/2), z'(\pi/2)) = (-3, 3, 0)$, que é paralelo a $(1, -1, 0)$.

Teste 12 [intsup2] A reta tangente à curva dada pela intersecção das superfícies $x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 1$ e $x + 2y = 1$ no ponto $(-3, 2, 1)$ é paralela ao vetor

☐ (2, -1, 0).

☐ (1, -1, 0).

☐ (-1, 2, 0).

☐ (1, 0, -1).

☐ (1, 0, -2).

Solução: Substituindo a equação do plano na do hiperbolóide, temos: $(1 - 2y)^2 - 3y^2 + 4z^2 = 1$ ou, completando quadrados, $(\frac{y-2}{2})^2 + z^2 = 1$. Para cada (y, z) que verifica a equação, existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que

$$y(t) = 2 + 2 \cos t, \quad z(t) = \sin t \quad \text{e} \quad x(t) = -3 - 4 \cos t.$$

O ponto $P = (-3, 2, 1)$ é atingido quando $t = \pi/2$ e ali o vetor tangente à curva é $(x'(\pi/2), y'(\pi/2), z'(\pi/2)) = (4, -2, 0)$, que é paralelo a $(2, -1, 0)$.

Teste 13 [intsup3] A reta tangente à curva dada pela intersecção das superfícies $5x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$ e $2x + y = 1$ no ponto $(-2, 5, 3/2)$ é paralela ao vetor

- ☒ $(-1, 2, 0)$.
- ☐ $(2, -1, 0)$.
- ☐ $(1, -1, 0)$.
- ☐ $(1, 0, -1)$.
- ☐ $(1, 0, -2)$.

Solução: Substituindo a equação do plano na do hiperbolóide, temos: $5x^2 - (1 - 2x)^2 + 4z^2 = 4$ ou, completando quadrados, $(\frac{x+2}{3})^2 + (\frac{z}{3/2})^2 = 1$. Para cada (x, z) que verifica a equação, existe $t \in [0, 2\pi]$ tal que

$$x(t) = -2 + 3 \cos t, \quad z(t) = \frac{3}{2} \sin t \quad \text{e} \quad y(t) = 5 - 6 \cos t.$$

O ponto $P = (-2, 5, 3/2)$ é atingido quando $t = \pi/2$ e ali o vetor tangente à curva é $(x'(\pi/2), y'(\pi/2), z'(\pi/2)) = (-3, 6, 0)$, que é paralelo a $(-1, 2, 0)$.

Teste 14 [cont1] Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{(x-1)^2}, & \text{se } x \neq 1; \\ y, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Então

- ☒ f não é contínua no ponto $(1, -1)$.
- ☐ a curva de nível $f(x, y) = 1$ contém o ponto $(1, 0)$.
- ☐ existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$, mas f não é contínua nesse ponto.
- ☐ f é contínua no ponto $(1, 0)$.
- ☐ f é contínua no ponto $(1, 1)$.

Solução: Note que os limites $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$ não existem. Para isso basta estudar f ao longo de segmentos de reta que aproximam-se arbitrariamente dos pontos em questão. Essa observação mostra que:

- ☒ **A** é verdadeira, pois $f(1, -1) = -1 \neq \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x, y)$.
- ☐ **B** é falsa, pois $f(1, 0) = 0 \neq 1$.
- ☐ **C** é falsa, pois o limite não existe.
- ☐ **D** é falsa, pois o limite não existe.
- ☐ **E** é falsa, pois o limite não existe.

Teste 15 [cont2] Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{(x-1)^2}, & \text{se } x \neq 1; \\ y, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Então

- ☒ f não é contínua no ponto $(1, 0)$.
- ☐ a curva de nível $f(x, y) = 1$ contém o ponto $(1, 0)$.
- ☐ existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$, mas f não é contínua nesse ponto.
- ☐ f é contínua no ponto $(1, 1)$.
- ☐ f é contínua no ponto $(1, -1)$.

Solução: Note que os limites $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$ não existem.

Para isso basta estudar f ao longo de segmentos de reta que aproximam-se arbitrariamente dos pontos em questão. Essa observação mostra que:

- ☐ A é verdadeira, pois $f(1, 0) = 0 \neq \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$.
- ☐ B é falsa, pois $f(1, 0) = 0 \neq 1$.
- ☐ C é falsa, pois o limite não existe.
- ☐ D é falsa, pois o limite não existe.
- ☐ E é falsa, pois o limite não existe.

Teste 16 [cont3] Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{(x-1)^2}, & \text{se } x \neq 1; \\ y, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Então

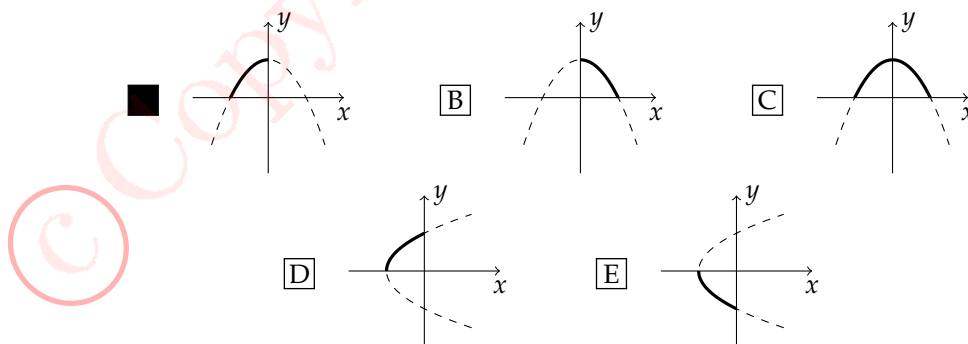
- ☒ f não é contínua no ponto $(1, 1)$.
- ☐ a curva de nível $f(x, y) = 1$ contém o ponto $(1, 0)$.
- ☐ existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y) = L \in \mathbb{R}$, mas f não é contínua nesse ponto.
- ☐ f é contínua no ponto $(1, -1)$.
- ☐ f é contínua no ponto $(1, 0)$.

Solução: Note que os limites $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} f(x, y)$, $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} f(x, y)$ não existem.

Para isso basta estudar f ao longo de segmentos de reta que aproximam-se arbitrariamente dos pontos em questão. Essa observação mostra que:

- ☐ A é verdadeira, pois $f(1, 1) = 1 \neq \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$.
- ☐ B é falsa, pois $f(1, 0) = 0 \neq 1$.
- ☐ C é falsa, pois o limite não existe.
- ☐ D é falsa, pois o limite não existe.
- ☐ E é falsa, pois o limite não existe.

Teste 17 [curvas1] A imagem da curva $\gamma(t) = (\sin^2 t - 1, 2 \sin^2 t - \sin^4 t)$, $t \in [0, 2\pi]$, está melhor representada em

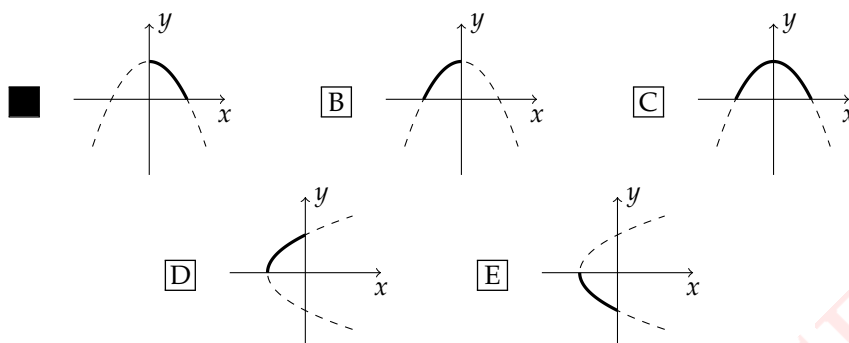


Solução: Indicando as coordenadas da curva por

$$x(t) = \sin^2 t - 1 \leq 0 \quad \text{e} \quad y(t) = 2 \sin^2 t - \sin^4 t = \sin^2 t (2 - \sin^2 t) \geq 0,$$

temos $\sin^2 t = x(t) + 1$. Então $y(t) = (x(t) + 1)(2 - (x(t) + 1))$, daí $\text{Im } \gamma \subset \{y = 1 - x^2\}$, restrita ao segundo quadrante, ou seja, o arco de parábola indicada na alternativa ☒ A.

Teste 18 [curvas2] A imagem da curva $\gamma(t) = (1 - \sin^2 t, 2 \sin^2 t - \sin^4 t), t \in [0, 2\pi]$, está melhor representada em

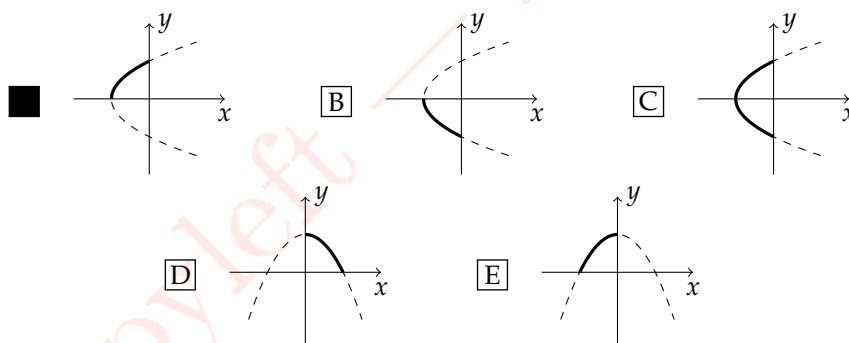


Solução: Indicando as coordenadas da curva por

$$x(t) = 1 - \sin^2 t \geq 0 \quad \text{e} \quad y(t) = 2 \sin^2 t - \sin^4 t = \sin^2 t (2 - \sin^2 t) \geq 0,$$

temos $\sin^2 t = 1 - x(t)$. Então $y(t) = (1 - x(t))(2 - (1 - x(t)))$, daí $\text{Im } \gamma \subset \{y = 1 - x^2\}$, restrita ao primeiro quadrante, ou seja, o arco de parábola indicada na alternativa **A**.

Teste 19 [curvas3] A imagem da curva $\gamma(t) = (\sin^4 t - 2 \sin^2 t, 1 - \sin^2 t), t \in [0, 2\pi]$, está melhor representada em

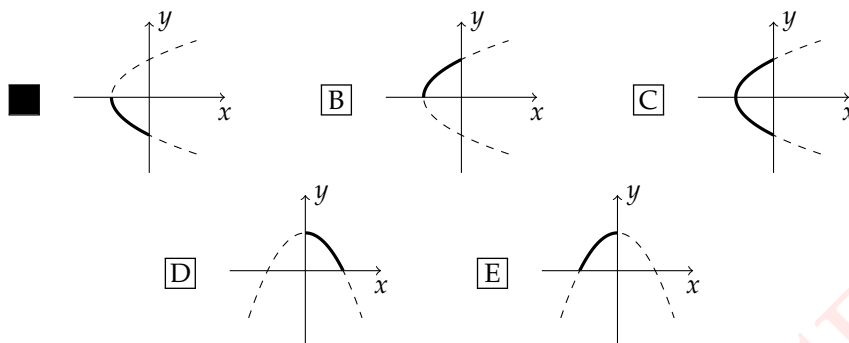


Solução: Indicando as coordenadas da curva por

$$x(t) = \sin^4 t - 2 \sin^2 t = \sin^2 t (\sin^2 t - 2) \leq 0 \quad \text{e} \quad y(t) = 1 - \sin^2 t \geq 0,$$

temos $\sin^2 t = 1 - y(t)$. Então $x(t) = (1 - y(t))(1 - y(t) - 2)$, daí $\text{Im } \gamma \subset \{x = y^2 - 1\}$, restrita ao segundo quadrante, ou seja, o arco de parábola indicada na alternativa **A**.

Teste 20 [curvas4] A imagem da curva $\gamma(t) = (\sin^4 t - 2 \sin^2 t, \sin^2 t - 1), t \in [0, 2\pi]$, está melhor representada em



Solução: Indicando as coordenadas da curva por

$$x(t) = \sin^4 t - 2 \sin^2 t = \sin^2 t (\sin^2 t - 2) \leq 0 \quad \text{e} \quad y(t) = \sin^2 t - 1 \leq 0,$$

temos $\sin^2 t = 1 - y(t)$. Então $x(t) = (1 - y(t))(1 - y(t) - 2)$, daí $\text{Im } \gamma \subset \{x = y^2 - 1\}$, restrita ao terceiro quadrante, ou seja, o arco de parábola indicada na alternativa **A**.

Teste 21 [param1] Uma parametrização para a interseção dos gráficos das funções $f(x, y) = x^2 - y^2$ e $g(x, y) = 1 - 2x^2 - 3y^2 + 6x + 8y$, em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é dada por

$$\gamma(t) = (a + b \cos t, c + d \sin t, z(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

em que a, b, c, d são números reais positivos.

Então, $\frac{a+b}{c+d}$ é igual a

A $\frac{3}{2+\sqrt{6}}$ **B** $\frac{2+\sqrt{6}}{3}$ **C** $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$ **D** $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$ **E** $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$

Solução: A terceira coordenada de γ é irrelevante, nos interessa projeção da curva no plano Oxy , a qual denotaremos por $\xi(t)$. Ela satisfaz a equação $f(x, y) = g(x, y)$, ou seja, $3x^2 - 6x + 2y^2 - 8y = 1$, que se escreve $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$. Parametrizando-a na forma do enunciado obtemos

$$\xi(t) = (1 + 2 \cos t, 2 + \sqrt{6} \sin t),$$

donde $a = 1, b = 2, c = 2$ e $d = \sqrt{6}$ e, portanto, $\frac{a+b}{c+d} = \frac{3}{2+\sqrt{6}}$.

Teste 22 [param2] Uma parametrização para a interseção dos gráficos das funções $f(x, y) = y^2 - x^2$ e $g(x, y) = 1 - 3x^2 - 2y^2 + 8x + 6y$, em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é dada por

$$\gamma(t) = (a + b \cos t, c + d \sin t, z(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

em que a, b, c, d são números reais positivos.

Então, $\frac{a+b}{c+d}$ é igual a

☒ $\frac{2+\sqrt{6}}{3}$.
 ☐ $\frac{3}{2+\sqrt{6}}$.
 ☐ $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$.
 ☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.
 ☐ $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$.

Solução: A terceira coordenada de γ é irrelevante, nos interessa projeção da curva no plano Oxy , a qual denotaremos por $\xi(t)$. Ela satisfaz a equação $f(x, y) = g(x, y)$, ou seja, $3y^2 - 6y + 2x^2 - 8x = 1$, que se escreve $\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$. Parametrizando-a na forma do enunciado obtemos

$$\xi(t) = (2 + \sqrt{6} \cos t, 1 + 2 \sin t),$$

donde $a = 2, b = \sqrt{6}, c = 1$ e $d = 2$ e, portanto, $\frac{a+b}{c+d} = \frac{2+\sqrt{6}}{3}$.

Teste 23 [param3] Uma parametrização para a interseção dos gráficos das funções $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ e $g(x, y) = 5 - 2x^2 - 2y^2 + 8x + 6y$, em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é dada por

$$\gamma(t) = (a + b \cos t, c + d \sin t, z(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

em que a, b, c, d são números reais positivos.

Então, $\frac{a+b}{c+d}$ é igual a

☒ $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.
 ☐ $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$.
 ☐ $\frac{3}{2+\sqrt{6}}$.
 ☐ $\frac{2+\sqrt{6}}{3}$.
 ☐ $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$.

Solução: A terceira coordenada de γ é irrelevante, nos interessa projeção da curva no plano Oxy , a qual denotaremos por $\xi(t)$. Ela satisfaz a equação $f(x, y) = g(x, y)$, ou seja, $4x^2 - 8x + 3y^2 - 6y = 5$, que se escreve $\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$. Parametrizando-a na forma do enunciado obtemos

$$\xi(t) = (1 + \sqrt{3} \cos t, 1 + 2 \sin t),$$

donde $a = 1, b = \sqrt{3}, c = 1$ e $d = 2$ e, portanto, $\frac{a+b}{c+d} = \frac{1+\sqrt{3}}{3}$.

Teste 24 [param4] Uma parametrização para a interseção dos gráficos das funções $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ e $g(x, y) = 5 - 2x^2 - 2y^2 + 6x + 8y$, em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, é dada por

$$\gamma(t) = (a + b \cos t, c + d \sin t, z(t)), \quad t \in [0, 2\pi],$$

em que a, b, c, d são números reais positivos.

Então, $\frac{a+b}{c+d}$ é igual a

☒ $\frac{3}{1+\sqrt{3}}$.
 ☐ $\frac{1+\sqrt{3}}{3}$.
 ☐ $\frac{3}{2+\sqrt{6}}$.
 ☐ $\frac{2+\sqrt{6}}{3}$.
 ☐ $\frac{3}{2+\sqrt{3}}$.

Solução: A terceira coordenada de γ é irrelevante, nos interessa projeção da curva no plano Oxy , a qual denotaremos por $\xi(t)$. Ela satisfaz a equação $f(x, y) = g(x, y)$, ou seja, $3x^2 - 6x + 4y^2 - 8y = 5$, que se escreve $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$. Parametrizando-a na forma do enunciado obtemos

$$\xi(t) = (1 + 2 \cos t, 1 + \sqrt{3} \sin t),$$

donde $a = 1, b = 2, c = 1$ e $d = \sqrt{3}$ e, portanto, $\frac{a+b}{c+d} = \frac{3}{1+\sqrt{3}}$.

Teste 25 [nivtan1] Suponha que a imagem da curva $\gamma(t) = (t, y(t))$ está contida na curva de nível 2 da função $f(x, y) = x^2 + 4y + 5x + 1$, em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, a reta tangente a γ em $\gamma(1)$ é

☒ $7x + 4y = 2.$

☐ $8x + 4y = 3.$

☐ $6x + 4y = 1.$

☐ $6x + 5y = 2.$

☐ $6x + 5y = 3.$

Solução: O enunciado diz que $2 = (f \circ \gamma)(t) = f(t, y(t)) = t^2 + 4y(t) + 5t + 1$. Fazendo $t = 1$ temos $y(1) = -5/4$. Derivando e fazendo $t = 1$, obtemos $y'(1) = -7/4$. A equação da reta em questão é $y - y(1) = y'(1)(x - 1)$. Substituindo temos $7x + 4y = 2$.

Teste 26 [nivtan2] Suponha que a imagem da curva $\gamma(t) = (t, y(t))$ está contida na curva de nível 3 da função $f(x, y) = x^2 + 4y + 5x + 1$, em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, a reta tangente a γ em $\gamma(1)$ é

☒ $7x + 4y = 3.$

☐ $6x + 4y = 2.$

☐ $8x + 4y = 4.$

☐ $6x + 5y = 2.$

☐ $6x + 5y = 3.$

Solução: O enunciado diz que $3 = (f \circ \gamma)(t) = f(t, y(t)) = t^2 + 4y(t) + 5t + 1$. Fazendo $t = 1$ temos $y(1) = -1$. Derivando e fazendo $t = 1$, obtemos $y'(1) = -7/4$. A equação da reta em questão é $y - y(1) = y'(1)(x - 1)$. Substituindo temos $7x + 4y = 3$.

Teste 27 [nivtan3] Suponha que a imagem da curva $\gamma(t) = (t, y(t))$ está contida na curva de nível 2 da função $f(x, y) = x^2 + 4x + 5y + 1$, em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, a reta tangente a γ em $\gamma(1)$ é

☒ $6x + 5y = 2.$

☐ $5x + 5y = 1.$

☐ $7x + 5y = 3.$

☐ $7x + 4y = 3.$

☐ $7x + 4y = 2.$

Solução: O enunciado diz que $2 = (f \circ \gamma)(t) = f(t, y(t)) = t^2 + 4t + 5y(t) + 1$. Fazendo $t = 1$ temos $y(1) = -4/5$. Derivando e fazendo $t = 1$, obtemos $y'(1) = -6/5$. A equação da reta em questão é $y - y(1) = y'(1)(x - 1)$. Substituindo temos $6x + 5y = 2$.

Teste 28 [nivtan4] Suponha que a imagem da curva $\gamma(t) = (t, y(t))$ está contida na curva de nível 3 da função $f(x, y) = x^2 + 4x + 5y + 1$, em que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Então, a reta tangente a γ em $\gamma(1)$ é

☒ $6x + 5y = 3.$

☐ $7x + 5y = 1.$

☐ $5x + 5y = 2.$

☐ $7x + 4y = 3.$

☐ $7x + 4y = 2.$

Solução: O enunciado diz que $3 = (f \circ \gamma)(t) = f(t, y(t)) = t^2 + 4t + 5y(t) + 1$. Fazendo $t = 1$ temos $y(1) = -3/5$. Derivando e fazendo $t = 1$, obtemos $y'(1) = -6/5$. A equação da reta em questão é $y - y(1) = y'(1)(x - 1)$. Substituindo temos $6x + 5y = 3$.

Para os testes 29 e 30 considere a função

$$f(x, y) = \frac{4x(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{2(x-1)y}{(x-1)^2 + y^2},$$

para todo $(x, y) \neq (1, 0)$ e $(x, y) \neq (0, 1)$.

Teste 29 [LimA1] O valor de $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$ é

☐ $0.$

☐ $1.$

☐ $2.$

☐ $-1.$

☒ inexistente.

Solução: O limite pedido não existe, pois a primeira parcela de $f(x, y)$ tende a 2, já que tal parcela é contínua em $(1, 0)$. A segunda parcela não tem limite nesse ponto, basta ver ao longo das curvas:

- $\gamma_1(t) = (1, t)$: $\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$;
- $\gamma_2(t) = (t, t-1)$: $\lim_{t \rightarrow 1} (f \circ \gamma_2)(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{2(t-1)(t-1)}{(t-1)^2 + (t-1)^2} = 1.$

Como uma parcela tem limite e a outra não, a soma não pode ter limite.

Teste 30 [LimA2] O valor de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$ é

☒ $-1.$

☐ $0.$

☐ $-2.$

☐ $2.$

☐ inexistente.

Solução: O limite pedido vale -1 , pois a primeira parcela tende a zero, uma vez que é o produto do fator $4x$, que tende a zero, com o fator $\frac{(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2}$, que é limitado. A segunda parcela é contínua em $(0, 1)$ e portanto o limite é o seu valor no ponto, -1 . Como cada uma das parcelas tem limite, o limite da soma é a soma dos limites: $0 + (-1) = -1$.

Para os testes 31 e 32 considere a função

$$f(x, y) = \frac{2y(x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{4x(y-1)}{x^2 + (y-1)^2},$$

para todo $(x, y) \neq (1, 0)$ e $(x, y) \neq (0, 1)$.

Teste 31 [LimB1] O valor de $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)$ é

- ☒ -2 .
- ☐ -1 .
- ☐ 1 .
- ☐ 0 .
- ☐ inexistente.

Solução: O limite pedido vale -2 , pois a primeira parcela tende a zero, uma vez que é o produto do fator $2y$, que tende a zero, com o fator $\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2}$, que é limitado. A segunda parcela é contínua em $(0, 1)$ e portanto o limite é o seu valor no ponto, -2 . Como cada uma das parcelas tem limite, o limite da soma é a soma dos limites: $0 + (-2) = -2$.

Teste 32 [LimB2] O valor de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x, y)$ é

- ☐ -1 .
- ☐ 0 .
- ☐ -2 .
- ☐ 2 .
- ☒ inexistente.

Solução: O limite pedido não existe, pois a primeira parcela de $f(x, y)$ tende a 1, já que tal parcela é contínua em $(0, 1)$. A segunda parcela não tem limite nesse ponto, basta ver ao longo das curvas:

- $\gamma_1(t) = (t, 1)$: $\lim_{t \rightarrow 0} (f \circ \gamma_1)(t) = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$;
- $\gamma_2(t) = (t-1, t)$: $\lim_{t \rightarrow 1} (f \circ \gamma_2)(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{4(t-1)(t-1)}{(t-1)^2 + (t-1)^2} = 2$.

Como uma parcela tem limite e a outra não, a soma não pode ter limite.

09/09/2019— MAT-2454 — Primeira Prova— Folha de Respostas

Respostas ilegíveis ou não indicadas nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: _____ NUSP: _____

Assinatura

Por favor coloque seu número USP nos campos abaixo, deixando as **primeiras colunas** em branco caso ele tenha menos de 8 dígitos.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Teste 1: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 2: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 3: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 4: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 5: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 6: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 7: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 8: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 9: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 10: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 11: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

CATALOG

Teste 12: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 13: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 14: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 15: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 16: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 17: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 18: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 19: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 20: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 21: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 22: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 23: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 24: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 25: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 26: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 27: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 28: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 29: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐

Teste 30: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 31: ☐ B ☐ C ☐ D ☐ E

Teste 32: ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D ☐