MAT–2454 — Cálculo Diferencial e Integral II — EP–USP

Segunda Prova— 14/10/2019

IDENTIFICAÇÃO

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

INSTRUÇÕES

1. **Não é permitido portar celular (mesmo desligado) durante o exame**. Sobre a carteira deixe apenas *lápis, borracha, caneta e um documento de identificação com foto*. Mochilas, blusas e demais pertences devem permancer à frente da sala, juntamente com os celulares (não custa repetir) e demais aparelhos eletrônicos, que devem estar **desligados**.
2. Preencha a tinta, e de maneira legível, todos os campos desta página.
3. Esta prova tem duração máxima de 2 horas. A entrega da prova e saída da sala só é permitida após 10:40.
4. Utilize, se necessário, as folhas seguintes (exceto a última) para rascunho.
5. Folha de respostas (última): Preencha, a tinta e completamente, os campos daquela folha. Deixe as **últimas colunas em branco**, caso seu número USP tenha menos de 8 dígitos. Isto deve ser feito **antes** da assinatura da lista de presença. **Evite erros nesse momento**.
6. Assinale, **com atenção**, apenas uma alternativa por questão, **preenchendo completamente o alvéolo**. Em caso de erro, o que deve ser evitado, assinale **também** a alternativa que julgar correta e indique expressamente qual delas deve ser considerada na própria folha de respostas.
7. Não haverá tempo adicional para transcrição das alternativas dos testes para a folha de respostas.
8. **Não destaque nenhuma folha de sua prova**.

Assinatura: ______________________________

BOA PROVA!

Para os testes 1 e 2 considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Teste 1 [`FuncA1`] Seja $\vec{u} = \left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) f admite derivadas parciais em $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(II) f não admite derivadas parciais em $(0,0)$.

(III) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(IV) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = 0$.

(V) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

São verdadeiras apenas as afirmações:

[redacted] (I) e (III).
B (I) e (IV).
C (II) e (IV).
D (I) e (V).
E (II) e (III).

Solução: Pelas definições de derivadas parciais e derivada direcional, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}, -\frac{t\sqrt{2}}{2}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\frac{t^3\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\sqrt{2}}{t^4+2t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.

Teste 2 [FuncA2]   É correto afirmar que:

- ■ f é contínua em $\mathbb{R}^2$, mas não é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
- [B] f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, mas não é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.
- [C] f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$, mas não é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.
- [D] f é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.
- [E] f não é contínua em $(0,0)$.

Solução: f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, como quociente de duas funções contínuas. Note que f também é contínua em $(0,0)$, pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\text{limitada}} = 0.$$

No entanto, f não é diferenciável em $(0,0)$. Basta observar que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq 0 = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle,$$

onde $\vec{u}$ é o vetor do teste anterior.

Para os testes 3 e 4 considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Teste 3 [FuncB1] Seja $\vec{u} = \left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$. Considere as seguintes afirmações:

(I) f admite derivadas parciais em $(0,0)$ e $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(II) f não admite derivadas parciais em $(0,0)$.

(III) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(IV) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = 0$.

(V) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

São verdadeiras apenas as afirmações:

■ (I) e (V).

B (I) e (III).

C (I) e (IV).

D (II) e (IV).

E (II) e (V).

Solução: Pelas definições de derivadas parciais e derivada direcional, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(-\frac{t\sqrt{2}}{2}, \frac{t\sqrt{2}}{2}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} -\frac{1}{t}\frac{t^3\sqrt{2}}{4}\frac{1}{\frac{t^4}{4}+\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to 0} -\frac{t^2\sqrt{2}}{t^4+2t^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, apenas as afirmações (I) e (V) são verdadeiras.

Teste 4 [FuncB2] É correto afirmar que:

- ■ f é contínua em $\mathbb{R}^2$, mas não é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
- [B] f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, mas não é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.
- [C] f é de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$, mas não é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.
- [D] f é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.
- [E] f não é contínua em $(0,0)$.

Solução: f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, como quociente de duas funções contínuas. Note que f também é contínua em $(0,0)$, pois

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\text{limitada}} = 0.$$

No entanto, f não é diferenciável em $(0,0)$. Basta observar que

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) \neq 0 = \langle \nabla f(0,0), \vec{u} \rangle,$$

onde $\vec{u}$ é o vetor do teste anterior.

Teste 5 [pltg1] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável satisfazendo

$$f(t^2, 2t^3) = 1 + e^{t^2-1}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4$, uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,f(1,2))$ é:

■ $4x - y - z = 0$.

[B] $4x + y - z - 4 = 0$.

[C] $4x - 2y - z + 2 = 0$.

[D] $4x + 2y - z - 6 = 0$.

[E] $4x - z - 2 = 0$.

Solução: Derivando a igualdade dada em relação a t e usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t^3) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 2t^3) = te^{t^2-1}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $t = 1$ e substituindo $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 4$, deduzimos que

$$4 + 3\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1.$$

Como $f(1,2) = 1 + e^{1-1} = 2$, o plano procurado tem equação

$$z = 2 + 4(x-1) - (y-2) \iff 4x - y - z = 0.$$

Teste 6 [`pltg2`] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável satisfazendo

$$f(t^2, 2t^3) = 1 + e^{t^2-1}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$, uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1,2))$ é:

- ■ $2x - y + z - 2 = 0$.
- B $2x + y - z - 2 = 0$.
- C $x - y + z - 1 = 0$.
- D $x + y - z - 1 = 0$.
- E $y - z = 0$.

Solução: Derivando a igualdade dada em relação a t e usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$t\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, 2t^3) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, 2t^3) = te^{t^2-1}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $t = 1$ e substituindo $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$, deduzimos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 3 = 1 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -2.$$

Como $f(1,2) = 1 + e^{1-1} = 2$, o plano procurado tem equação

$$z = 2 - 2(x-1) + (y-2) \iff 2x - y + z - 2 = 0.$$

Teste 7 [`pltg3`] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável satisfazendo

$$f(2t^3, t^2) = 1 + e^{t^2-1}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$, uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2,1))$ é:

- ■ $x - 2y - z + 2 = 0$.
- B $x + 2y - z - 2 = 0$.
- C $x - y - z + 1 = 0$.
- D $x + y - z - 1 = 0$.
- E $x - z = 0$.

Solução: Derivando a igualdade dada em relação a t e usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$3t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(2t^3, t^2) + t \frac{\partial f}{\partial y}(2t^3, t^2) = te^{t^2-1}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $t = 1$ e substituindo $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 1$, deduzimos que

$$3 + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 1 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -2.$$

Como $f(2,1) = 1 + e^{1-1} = 2$, o plano procurado tem equação

$$z = 2 + (x-2) - 2(y-1) \iff x - 2y - z + 2 = 0.$$

Teste 8 [`pltg4`] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável satisfazendo

$$f(2t^3, t^2) = 1 + e^{t^2-1}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 4$, uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2,1))$ é:

- ■ $x - 4y + z = 0$.
- B $x + 4y - z - 4 = 0$.
- C $2x - 4y + z - 2 = 0$.
- D $2x + 4y - z - 6 = 0$.
- E $4y - z = 0$.

Solução: Derivando a igualdade dada em relação a t e usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$3t^2 \frac{\partial f}{\partial x}(2t^3, t^2) + t\frac{\partial f}{\partial y}(2t^3, t^2) = te^{t^2-1}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Fazendo $t = 1$ e substituindo $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 4$, deduzimos que

$$3\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) + 4 = 1 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1.$$

Como $f(2,1) = 1 + e^{1-1} = 2$, o plano procurado tem equação

$$z = 2 - (x-2) + 4(y-1) \iff x - 4y + z = 0.$$

Teste 9 [`nivnab1`] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\nabla f(1,1) = (1,1)$. Sabendo que exatamente uma das curvas abaixo tem imagem contida na curva de nível de f que contém $(1,1)$, assinale a alternativa que contém tal curva.

■ $\gamma(t) = (t, 1/t), t \in \,]0, +\infty[$.
[B] $\gamma(t) = (\sec t, \tan t + 1), t \in \,\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
[C] $\gamma(t) = (\cos t + 1, \sin t), t \in \mathbb{R}$.
[D] $\gamma(t) = (t, \ln t + 1), t \in \,]0, +\infty[$.
[E] $\gamma(t) = (t^3, t), t \in \mathbb{R}$.

Solução: Sabemos que o gradiente de f no ponto $P = (1,1)$ deve ser normal à curva de nível de f que contém P. Neste caso, a curva procurada deve satisfazer

$$\langle \gamma'(t_0), (1,1) \rangle = 0,$$

onde t_0 é tal que $\gamma(t_0) = P$. A única curva fornecida nas alternativas que satisfaz esta propriedade é

$$\gamma(t) = (t, 1/t), t \in \,]0, +\infty[.$$

Com efeito, $\gamma(1) = P$ e $\gamma'(1) = (1,-1) \perp (1,1)$, como desejado.

Teste 10 [`nivnab2`] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\nabla f(1,1) = (1,0)$. Sabendo que exatamente uma das curvas abaixo tem imagem contida na curva de nível de f que contém $(1,1)$, assinale a alternativa que contém tal curva.

■ $\gamma(t) = (\sec t, \tan t + 1), t \in \,\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
[B] $\gamma(t) = (t, 1/t), t \in \,]0, +\infty[$.
[C] $\gamma(t) = (\cos t + 1, \sin t), t \in \mathbb{R}$.
[D] $\gamma(t) = (t, \ln t + 1), t \in \,]0, +\infty[$.
[E] $\gamma(t) = (t^3, t), t \in \mathbb{R}$.

Solução: Sabemos que o gradiente de f no ponto $P = (1,1)$ deve ser normal à curva de nível de f que contém P. Neste caso, a curva procurada deve satisfazer

$$\langle \gamma'(t_0), (1,0) \rangle = 0,$$

onde t_0 é tal que $\gamma(t_0) = P$. A única curva fornecida nas alternativas que satisfaz esta propriedade é

$$\gamma(t) = (\sec t, \tan t + 1), t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Com efeito, $\gamma(0) = P$ e $\gamma'(0) = (\sec 0 \cdot \tan 0, \sec^2 0) = (0,1) \perp (1,0)$, como desejado.

Teste 11 [`nivnab3`] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\nabla f(1,1) = (0,1)$. Sabendo que exatamente uma das curvas abaixo tem imagem contida na curva de nível de f que contém $(1,1)$, assinale a alternativa que contém tal curva.

■ $\gamma(t) = (\cos t + 1, \sin t), t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\gamma(t) = (\sec t, \tan t + 1), t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\boxed{\text{C}}$ $\gamma(t) = (t, 1/t), t \in]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{D}}$ $\gamma(t) = (t, \ln t + 1), t \in]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{E}}$ $\gamma(t) = (t^3, t), t \in \mathbb{R}$.

Solução: Sabemos que o gradiente de f no ponto $P = (1,1)$ deve ser normal à curva de nível de f que contém P. Neste caso, a curva procurada deve satisfazer

$$\langle \gamma'(t_0), (0,1) \rangle = 0,$$

onde t_0 é tal que $\gamma(t_0) = P$. A única curva fornecida nas alternativas que satisfaz esta propriedade é

$$\gamma(t) = (\cos t + 1, \sin t), t \in \mathbb{R}.$$

Com efeito, $\gamma(\pi/2) = P$ e $\gamma'(\pi/2) = (-\sin \pi/2, \cos \pi/2) = (-1,0) \perp (0,1)$, como desejado.

Teste 12 [`nivnab4`] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $\nabla f(1,1) = (1,-1)$. Sabendo que exatamente uma das curvas abaixo tem imagem contida na curva de nível de f que contém $(1,1)$, assinale a alternativa que contém tal curva.

■ $\gamma(t) = (t, \ln t + 1), t \in]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{B}}$ $\gamma(t) = (\cos t + 1, \sin t), t \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\gamma(t) = (\sec t, \tan t + 1), t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\boxed{\text{D}}$ $\gamma(t) = (t, 1/t), t \in]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{E}}$ $\gamma(t) = (t^3, t), t \in \mathbb{R}$.

Solução: Sabemos que o gradiente de f no ponto $P = (1,1)$ deve ser normal à curva de nível de f que contém P. Neste caso, a curva procurada deve satisfazer

$$\langle \gamma'(t_0), (1,-1) \rangle = 0,$$

onde t_0 é tal que $\gamma(t_0) = P$. A única curva fornecida nas alternativas que satisfaz esta propriedade é

$$\gamma(t) = (t, \ln t + 1), t \in \ ]0, +\infty[\,.$$

Com efeito, $\gamma(1) = P$ e $\gamma'(1) = (1,1) \perp (1,-1)$, como desejado.

Teste 13 `[part1]` Um ponto P se desloca, a partir do ponto $(-1, 3)$, no plano xy. A trajetória de P é parametrizada pela curva

$$\gamma(t) = (ae^t + be^{-t}, ce^t + de^{-t}), t \in \ [0, +\infty[,$$

onde a, b, c, d são constantes reais. Suponha que a direção e o sentido do vetor tangente à trajetória de P no instante $t = 0$ sejam aqueles de maior crescimento da função $f(x, y) = xy$ no ponto $(-1, 3)$. Sabendo que $\|\gamma'(0)\| = \sqrt{10}$, em qual ponto P cruza o eixo Oy?

■ $(0, 2\sqrt{2})$.

[B] $(0, 2\sqrt{6})$.

[C] $(0, -2\sqrt{2})$.

[D] $(0, -2\sqrt{6})$.

[E] $(0, 0)$.

Solução: A direção e o sentido de maior crescimento de f em $(-1, 3)$ são os mesmos do vetor $\nabla f(-1, 3) = (3, -1)$. A hipótese sobre γ implica que existe um número real $\lambda \geq 0$ tal que $\gamma'(0) = \lambda(3, -1)$ e, portanto,

$$\sqrt{10} = \|\gamma'(0)\| = \lambda\|(3, -1)\| = \lambda\sqrt{10}.$$

Isto significa que $\lambda = 1$ e $\gamma'(0) = (3, -1)$. Por outro lado, sabemos que

$$\gamma(0) = (a + b, c + d) = (-1, 3),$$
$$\gamma'(0) = (a - b, c - d) = (3, -1).$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = c = 1$, $b = -2$ e $d = 2$, ou seja,

$$\gamma(t) = (e^t - 2e^{-t}, e^t + 2e^{-t}).$$

A primeira coordenada se anula apenas em $t_0 = \ln\sqrt{2}$. A segunda coordenada, calculada em t_0, vale $2\sqrt{2}$.

Teste 14 [`part2`] Um ponto P se desloca, a partir do ponto $(-1, 5)$, no plano xy. A trajetória de P é parametrizada pela curva

$$\gamma(t) = (ae^t + be^{-t}, ce^t + de^{-t}), t \in \ [0, +\infty[,$$

onde a, b, c, d são constantes reais. Suponha que a direção e o sentido do vetor tangente à trajetória de P no instante $t = 0$ sejam aqueles de maior crescimento da função $f(x, y) = xy$ no ponto $(-1, 5)$. Sabendo que $\|\gamma'(0)\| = \sqrt{26}$, em qual ponto P cruza o eixo Oy?

■ $(0, 2\sqrt{6})$.
[B] $(0, 2\sqrt{2})$.
[C] $(0, -2\sqrt{2})$.
[D] $(0, -2\sqrt{6})$.
[E] $(0, 0)$.

Solução: A direção e o sentido de maior crescimento de f em $(-1, 5)$ são os mesmos do vetor $\nabla f(-1, 5) = (5, -1)$. A hipótese sobre γ implica que existe um número real $\lambda \geq 0$ tal que $\gamma'(0) = \lambda(5, -1)$ e, portanto,

$$\sqrt{26} = \|\gamma'(0)\| = \lambda\|(5, -1)\| = \lambda\sqrt{26}.$$

Isto significa que $\lambda = 1$ e $\gamma'(0) = (5, -1)$. Por outro lado, sabemos que

$$\gamma(0) = (a + b, c + d) = (-1, 5),$$
$$\gamma'(0) = (a - b, c - d) = (5, -1).$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = c = 2$, $b = -3$ e $d = 3$, ou seja,

$$\gamma(t) = (2e^t - 3e^{-t}, 2e^t + 3e^{-t}).$$

A primeira coordenada se anula apenas em $t_0 = \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. A segunda coordenada, calculada em t_0, vale $2\sqrt{6}$.

Teste 15 [`part3`] Um ponto P se desloca, a partir do ponto $(1,-3)$, no plano xy. A trajetória de P é parametrizada pela curva

$$\gamma(t) = (ae^t + be^{-t}, ce^t + de^{-t}), t \in \ [0,+\infty[,$$

onde a, b, c, d são constantes reais. Suponha que a direção e o sentido do vetor tangente à trajetória de P no instante $t = 0$ sejam aqueles de maior crescimento da função $f(x,y) = xy$ no ponto $(1,-3)$. Sabendo que $\|\gamma'(0)\| = \sqrt{10}$, em qual ponto P cruza o eixo Oy?

■ $(0,-2\sqrt{2})$.

[B] $(0,2\sqrt{6})$.

[C] $(0,2\sqrt{2})$.

[D] $(0,-2\sqrt{6})$.

[E] $(0,0)$.

Solução: A direção e o sentido de maior crescimento de f em $(1,-3)$ são os mesmos do vetor $\nabla f(1,-3) = (-3,1)$. A hipótese sobre γ implica que existe um número real $\lambda \geq 0$ tal que $\gamma'(0) = \lambda(-3,1)$ e, portanto,

$$\sqrt{10} = \|\gamma'(0)\| = \lambda\|(-3,1)\| = \lambda\sqrt{10}.$$

Isto significa que $\lambda = 1$ e $\gamma'(0) = (-3,1)$. Por outro lado, sabemos que

$$\gamma(0) = (a+b, c+d) = (1,-3),$$
$$\gamma'(0) = (a-b, c-d) = (-3,1).$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = c = -1$, $b = 2$ e $d = -2$, ou seja,

$$\gamma(t) = (-e^t + 2e^{-t}, -e^t - 2e^{-t}).$$

A primeira coordenada se anula apenas em $t_0 = \ln\sqrt{2}$. A segunda coordenada, calculada em t_0, vale $-2\sqrt{2}$.

Teste 16 `[part4]` Um ponto P se desloca, a partir do ponto $(1,-5)$, no plano xy. A trajetória de P é parametrizada pela curva

$$\gamma(t) = (ae^t + be^{-t}, ce^t + de^{-t}), t \in \ [0,+\infty[,$$

onde a, b, c, d são constantes reais. Suponha que a direção e o sentido do vetor tangente à trajetória de P no instante $t = 0$ sejam aqueles de maior crescimento da função $f(x,y) = xy$ no ponto $(1,-5)$. Sabendo que $\|\gamma'(0)\| = \sqrt{26}$, em qual ponto P cruza o eixo Oy?

- ■ $(0,-2\sqrt{6})$.
- B $(0,-2\sqrt{2})$.
- C $(0,2\sqrt{6})$.
- D $(0,2\sqrt{2})$.
- E $(0,0)$.

Solução: A direção e o sentido de maior crescimento de f em $(1,-5)$ são os mesmos do vetor $\nabla f(1,-5) = (-5,1)$. A hipótese sobre γ implica que existe um número real $\lambda \geq 0$ tal que $\gamma'(0) = \lambda(-5,1)$ e, portanto,

$$\sqrt{26} = \|\gamma'(0)\| = \lambda\|(-5,1)\| = \lambda\sqrt{26}.$$

Isto significa que $\lambda = 1$ e $\gamma'(0) = (-5,1)$. Por outro lado, sabemos que

$$\gamma(0) = (a+b, c+d) = (1,-5),$$
$$\gamma'(0) = (a-b, c-d) = (-5,1).$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = c = -2$, $b = 3$ e $d = -3$, ou seja,

$$\gamma(t) = (-2e^t + 3e^{-t}, -2e^t - 3e^{-t}).$$

A primeira coordenada se anula apenas em $t_0 = \ln \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. A segunda coordenada, calculada em t_0, vale $-2\sqrt{6}$.

Teste 17 [cadeia1] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Considere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u,v) = uf(u^2+v^2, uv).$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-1) = 4$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,-1) = 0$, o valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(-1,1)$ é:

■ 16. [B] 8. [C] -16. [D] -8. [E] 0.

Solução: Derivando g em relação a u usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(u^2+v^2,uv) + u\left[2u\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)\right].$$

Usando novamente a Regra da Cadeia e lembrando que, pelo Teorema de Schwarz, as derivadas parciais mistas de f coincidem, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) &= 2v\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)\\ &\quad + 4u^2v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,uv) + u^2v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,uv)\\ &\quad + 2u(u^2+v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u^2+v^2,uv).\end{aligned}$$

Fazendo $(u,v) = (-1,1)$ e substituindo os valores fornecidos no enunciado, resulta $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(-1,1) = 16$.

Teste 18 `[cadeia2]` Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2. Considere $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(u,v) = uf(u^2+v^2, uv).$$

Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-1) = 4$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,-1) = 0$, o valor de $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(1,-1)$ é:

■ -16. $\boxed{\text{B}}$ 16. $\boxed{\text{C}}$ 8. $\boxed{\text{D}}$ -8. $\boxed{\text{E}}$ 0.

Solução: Derivando g em relação a u usando a Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = f(u^2+v^2,uv) + u\left[2u\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + v\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)\right].$$

Usando novamente a Regra da Cadeia e lembrando que, pelo Teorema de Schwarz, as derivadas parciais mistas de f coincidem, concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u,v) &= 2v\frac{\partial f}{\partial x}(u^2+v^2,uv) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(u^2+v^2,uv)\\ &\quad + 4u^2v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2+v^2,uv) + u^2v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2+v^2,uv)\\ &\quad + 2u(u^2+v^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u^2+v^2,uv).\end{aligned}$$

Fazendo $(u,v) = (1,-1)$ e substituindo os valores fornecidos no enunciado, resulta $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(-1,1) = -16$.

Teste 19 `[dircres1]` Suponha que a função $T\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

represente uma distribuição de temperatura em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Considere uma partícula sobre o ponto $P = (1,2)$. A direção e o sentido de maior crescimento da temperatura desta partícula são os mesmos do vetor:

■ $(-1,-2)$. $\boxed{\text{B}}$ $(1,2)$. $\boxed{\text{C}}$ $(-1,2)$. $\boxed{\text{D}}$ $(1,-2)$. $\boxed{\text{E}}$ $(1,1)$.

Solução: O gradiente de T em um ponto $(x,y) \neq (0,0)$ é

$$\nabla T(x,y) = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y),$$

que tem a mesma direção de (x,y) e sentido oposto ao de (x,y). Logo, a direção e o sentido de maior crescimento de T em $(1,2)$ são os mesmos do vetor $(-1,-2)$.

Teste 20 [`dircres2`] Suponha que a função $T\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

represente uma distribuição de temperatura em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Considere uma partícula sobre o ponto $P = (-1,-2)$. A direção e o sentido de maior crescimento da temperatura desta partícula são os mesmos do vetor:

■ $(1,2)$. $\boxed{\text{B}}$ $(-1,-2)$. $\boxed{\text{C}}$ $(-1,2)$. $\boxed{\text{D}}$ $(1,-2)$. $\boxed{\text{E}}$ $(1,1)$.

Solução: O gradiente de T em um ponto $(x,y) \neq (0,0)$ é

$$\nabla T(x,y) = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y),$$

que tem a mesma direção de (x,y) e sentido oposto ao de (x,y). Logo, a direção e o sentido de maior crescimento de T em $(-1,-2)$ são os mesmos do vetor $(1,2)$.

Teste 21 [`dircres3`] Suponha que a função $T\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

represente uma distribuição de temperatura em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Considere uma partícula sobre o ponto $P = (1,-2)$. A direção e o sentido de maior crescimento da temperatura desta partícula são os mesmos do vetor:

■ $(-1,2)$. $\boxed{\text{B}}$ $(1,2)$. $\boxed{\text{C}}$ $(-1,-2)$. $\boxed{\text{D}}$ $(1,-2)$. $\boxed{\text{E}}$ $(1,1)$.

Solução: O gradiente de T em um ponto $(x,y) \neq (0,0)$ é

$$\nabla T(x,y) = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y),$$

que tem a mesma direção de (x,y) e sentido oposto ao de (x,y). Logo, a direção e o sentido de maior crescimento de T em $(1,-2)$ são os mesmos do vetor $(-1,2)$.

Teste 22 [dircres4] Suponha que a função $T : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

represente uma distribuição de temperatura em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Considere uma partícula sobre o ponto $P = (-1,2)$. A direção e o sentido de maior crescimento da temperatura desta partícula são os mesmos do vetor:

■ $(1,-2)$. $\boxed{\text{B}}$ $(-1,2)$. $\boxed{\text{C}}$ $(1,2)$. $\boxed{\text{D}}$ $(-1,-2)$. $\boxed{\text{E}}$ $(1,1)$.

Solução: O gradiente de T em um ponto $(x,y) \neq (0,0)$ é

$$\nabla T(x,y) = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2}(x,y),$$

que tem a mesma direção de (x,y) e sentido oposto ao de (x,y). Logo, a direção e o sentido de maior crescimento de T em $(-1,2)$ são os mesmos do vetor $(1,-2)$.

Teste 23 [grad1] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que o gráfico de f contém as imagens das curvas $\alpha(t) = \left(t^2, t, -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right), t \in \mathbb{R}$, e $\beta(u) = \left(u, \frac{1}{u}, u^4 - 1\right), u > 0$. Nestas condições, o gradiente de f em $(1,1)$ é paralelo ao vetor:

■ $(2,-6)$. $\boxed{\text{B}}$ $(2,4)$. $\boxed{\text{C}}$ $(2,-8)$. $\boxed{\text{D}}$ $(2,6)$. $\boxed{\text{E}}$ $(2,-4)$.

Solução: Derivando

$$f(t^2,t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2},$$
$$f(u,1/u) = u^4 - 1$$

em $t = 1$ e $u = 1$, respectivamente, obtemos

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4.$$

Isto implica que $\nabla f(1,1) = (1,-3)$, que é paralelo ao vetor $(2,-6)$.

Teste 24 [grad2] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que o gráfico de f contém as imagens das curvas $\alpha(t) = \left(t^2, t, t^4 - 1\right), t \in \mathbb{R}$, e $\beta(u) = \left(u, \frac{1}{u}, -\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\right), u > 0$. Nestas condições, o gradiente de f em $(1,1)$ é paralelo ao vetor:

■ $(2,4)$. $\boxed{\text{B}}$ $(2,-6)$. $\boxed{\text{C}}$ $(2,-8)$. $\boxed{\text{D}}$ $(2,6)$. $\boxed{\text{E}}$ $(2,-4)$.

Solução: Derivando

$$f(t^2, t) = t^4 - 1,$$
$$f(u, 1/u) = -\frac{u^2}{2} + \frac{u}{2}$$

em $t = 1$ e $u = 1$, respectivamente, obtemos

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -1.$$

Isto implica que $\nabla f(1,1) = (1,2)$, que é paralelo ao vetor $(2,4)$.

Teste 25 [grad3] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que o gráfico de f contém as imagens das curvas $\alpha(t) = \left(t^2, t, -t^2 + 1\right), t \in \mathbb{R}$, e $\beta(u) = \left(u, \frac{1}{u}, u^5 - 1\right), u > 0$. Nestas condições, o gradiente de f em $(1,1)$ é paralelo ao vetor:

■ $(2,-8)$. $\boxed{\text{B}}$ $(2,4)$. $\boxed{\text{C}}$ $(2,-6)$. $\boxed{\text{D}}$ $(2,6)$. $\boxed{\text{E}}$ $(2,-4)$.

Solução: Derivando

$$f(t^2, t) = -t^2 + 1,$$
$$f(u, 1/u) = u^5 - 1$$

em $t = 1$ e $u = 1$, respectivamente, obtemos

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5.$$

Isto implica que $\nabla f(1,1) = (1,-4)$, que é paralelo ao vetor $(2,-8)$.

Teste 26 [grad4] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabe-se que o gráfico de f contém as imagens das curvas $\alpha(t) = \left(t^2, t, t^5 - 1\right), t \in \mathbb{R}$, e $\beta(u) = \left(u, \frac{1}{u}, -u^2 + 1\right), u > 0$. Nestas condições, o gradiente de f em $(1,1)$ é paralelo ao vetor:

■ $(2,6)$. $\boxed{\text{B}}$ $(2,-8)$. $\boxed{\text{C}}$ $(2,4)$. $\boxed{\text{D}}$ $(2,-6)$. $\boxed{\text{E}}$ $(2,-4)$.

Solução: Derivando

$$f(t^2, t) = t^5 - 1,$$
$$f(u, 1/u) = -u^2 + 1$$

em $t = 1$ e $u = 1$, respectivamente, obtemos

$$2\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 5,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) - \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2.$$

Isto implica que $\nabla f(1,1) = (1,3)$, que é paralelo ao vetor $(2,6)$.

Teste 27 [elet1] A intensidade de um campo elétrico no plano xy é dada por uma função diferenciável $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Uma partícula de prova passeia ao longo da curva $\gamma(t) = (t^2 + 1, 3t), t \in [0, +\infty[$. Sabendo que $\frac{\partial E}{\partial x}(2,3) = 6$ e $\frac{\partial E}{\partial y}(2,3) = -2$, a taxa de variação da intensidade do campo que a partícula experimenta no instante $t = 1$ de seu movimento é de:

■ 6. $\boxed{\text{B}}$ 10. $\boxed{\text{C}}$ -6. $\boxed{\text{D}}$ -10. $\boxed{\text{E}}$ 0.

Solução: Considere a função $h\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = E(\gamma(t)) = E(t^2 + 1, 3t).$$

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = 2t\frac{\partial E}{\partial x}(t^2 + 1, 3t) + 3\frac{\partial E}{\partial y}(t^2 + 1, 3t),$$

para todo $t > 0$. Fazendo $t = 1$ e substituindo os dados do enunciado, obtemos $h'(1) = 6$.

Teste 28 `[elet2]` A intensidade de um campo elétrico no plano xy é dada por uma função diferenciável $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Uma partícula de prova passeia ao longo da curva $\gamma(t) = (t^2 + 1, 3t), t \in [0, +\infty[$. Sabendo que $\frac{\partial E}{\partial x}(5,6) = 4$ e $\frac{\partial E}{\partial y}(5,6) = -2$, a taxa de variação da intensidade do campo que a partícula experimenta no instante $t = 2$ de seu movimento é de:

■ 10. $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ 6. $\quad$ $\boxed{\text{C}}$ -6. $\quad$ $\boxed{\text{D}}$ -10. $\quad$ $\boxed{\text{E}}$ 0.

Solução: Considere a função $h\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = E(\gamma(t)) = E(t^2 + 1, 3t).$$

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = 2t\frac{\partial E}{\partial x}(t^2 + 1, 3t) + 3\frac{\partial E}{\partial y}(t^2 + 1, 3t),$$

para todo $t > 0$. Fazendo $t = 2$ e substituindo os dados do enunciado, obtemos $h'(2) = 10$.

Teste 29 `[elet3]` A intensidade de um campo elétrico no plano xy é dada por uma função diferenciável $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Uma partícula de prova passeia ao longo da curva $\gamma(t) = (t^2 + 1, 3t), t \in [0, +\infty[$. Sabendo que $\frac{\partial E}{\partial x}(10,9) = 3$ e $\frac{\partial E}{\partial y}(10,9) = -8$, a taxa de variação da intensidade do campo que a partícula experimenta no instante $t = 3$ de seu movimento é de:

■ -6. $\quad$ $\boxed{\text{B}}$ 10. $\quad$ $\boxed{\text{C}}$ 6. $\quad$ $\boxed{\text{D}}$ -10. $\quad$ $\boxed{\text{E}}$ 0.

Solução: Considere a função $h\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = E(\gamma(t)) = E(t^2 + 1, 3t).$$

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = 2t\frac{\partial E}{\partial x}(t^2 + 1, 3t) + 3\frac{\partial E}{\partial y}(t^2 + 1, 3t),$$

para todo $t > 0$. Fazendo $t = 3$ e substituindo os dados do enunciado, obtemos $h'(3) = -6$.

Teste 30 [elet4] A intensidade de um campo elétrico no plano xy é dada por uma função diferenciável $E\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Uma partícula de prova passeia ao longo da curva $\gamma(t) = (t^2+1, 3t), t \in [0, +\infty[$. Sabendo que $\frac{\partial E}{\partial x}(17, 12) = -2$ e $\frac{\partial E}{\partial y}(17, 12) = 2$, a taxa de variação da intensidade do campo que a partícula experimenta no instante $t = 4$ de seu movimento é de:

■ -10. [B] -6. [C] 10. [D] 6. [E] 0.

Solução: Considere a função $h\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$h(t) = E(\gamma(t)) = E(t^2+1, 3t).$$

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(t) = 2t\frac{\partial E}{\partial x}(t^2+1, 3t) + 3\frac{\partial E}{\partial y}(t^2+1, 3t),$$

para todo $t > 0$. Fazendo $t = 4$ e substituindo os dados do enunciado, obtemos $h'(4) = -10$.

Teste 31 `[teor1]` Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Assinale a única afirmação que é **falsa**.

■ Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ existe, então $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ também existe.

$\boxed{\text{B}}$ Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são funções de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$, então para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$.

$\boxed{\text{C}}$ Se f é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, então as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$ para todo vetor unitário $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, então $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$\boxed{\text{E}}$ Se $|f(x, y)| \leq x^2 + y^2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em $(0, 0)$.

Solução: A primeira afirmação é *falsa*. Definindo $f(x, y) = |x|$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

No entanto, como o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{|t|}{t}$$

não existe, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ não existe e, portanto, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ também não.
A segunda afirmação é *verdadeira*. Se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem e são funções de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$, então f é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e, pelo Teorema de Schwarz, suas derivadas parciais mistas (de segunda ordem) coincidem em $\mathbb{R}^2$.
A terceira afirmação é *verdadeira*. Se f é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$, então suas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas em $\mathbb{R}^2$. Isto significa que as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são de classe $\mathcal{C}^1$ (e, portanto, diferenciáveis) em $\mathbb{R}^2$.
A querta afirmação é *verdadeira*. Basta lembrar que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial e_2}(x_0, y_0)$, onde $\{e_1, e_2\}$ denota a base canônica de $\mathbb{R}^2$.
A quinta afirmação E é *verdadeira*. Observe primeiramente que, por hipótese, $f(0, 0) = 0$. Logo,

$$\lim_{t \to 0} \frac{|f(t, 0) - f(0, 0)|}{|t|} = \lim_{t \to 0} \frac{|f(t, 0)|}{|t|} \leq \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{|t|} = \lim_{t \to 0} |t| = 0.$$

Isto implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = 0.$$

Analogamente, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{|f(h, k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&\leq \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} = 0.
\end{aligned}$$

Isto prova que f é diferenciável em $(0, 0)$.

Teste 32 [teor2] Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função qualquer. Assinale a única afirmação que é **verdadeira**.

■ se $|f(x,y)| \leq x^2 + y^2$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então f é diferenciável em $(0,0)$.

B se $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$ existe, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ também existe.

C se as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, então f é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

D se $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$, então $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$ para todo vetor unitário $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

E se $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

Solução: A primeira afirmação é *verdadeira*. Observe primeiramente que, por hipótese, $f(0,0) = 0$. Logo,

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(t,0) - f(0,0)|}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{|f(t,0)|}{|t|} \leq \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{|t|} = \lim_{t\to 0} |t| = 0.$$

Isto implica que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Analogamente, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Finalmente,

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &\leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2} = 0.\end{aligned}$$

Isto prova que f é diferenciável em $(0,0)$.
A segunda afirmação é *falsa*. Definindo $f(x,y) = |x|$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \implies \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

No entanto, como o limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

não existe, concluímos que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe e, portanto, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ também não.
A terceira afirmação é *falsa*. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{5/2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Não é difícil (mas é trabalhoso) mostrar que as derivadas parciais de primeira ordem de f são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$, mas f não é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.
A quarta afirmação é *falsa*. Basta tomar a função f usada nos testes 1 e 2 ou dos testes 3 e 4.
A quinta afirmação é *falsa*. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{5/2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

As derivadas parciais mistas (de segunda ordem) de f existem e coincidem em todos os pontos, mas f não é de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

14/10/2019— MAT–2454 — Segunda Prova— Folha de Respostas

Respostas ilegíveis ou não indicadas nesta folha serão desconsideradas.

Identificação:

Nome: ______________________________ **NUSP:** ______________

____
Assinatura

Por favor coloque seu número USP nos campos abaixo, deixando as **primeiras colunas** em branco caso ele tenha menos de 8 dígitos.

0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9

Respostas:

Teste 1:	■	B	C	D	E
Teste 2:	■	B	C	D	E
Teste 3:	■	B	C	D	E
Teste 4:	■	B	C	D	E
Teste 5:	■	B	C	D	E
Teste 6:	■	B	C	D	E
Teste 7:	■	B	C	D	E
Teste 8:	■	B	C	D	E
Teste 9:	■	B	C	D	E
Teste 10:	■	B	C	D	E
Teste 11:	■	B	C	D	E
Teste 12:	■	B	C	D	E
Teste 13:	■	B	C	D	E
Teste 14:	■	B	C	D	E
Teste 15:	■	B	C	D	E
Teste 16:	■	B	C	D	E
Teste 17:	■	B	C	D	E
Teste 18:	■	B	C	D	E

Teste 19: ■ B C D E

Teste 20: ■ B C D E

Teste 21: ■ B C D E

Teste 22: ■ B C D E

Teste 23: ■ B C D E

Teste 24: ■ B C D E

Teste 25: ■ B C D E

Teste 26: ■ B C D E

Teste 27: ■ B C D E

Teste 28: ■ B C D E

Teste 29: ■ B C D E

Teste 30: ■ B C D E

Teste 31: ■ B C D E

Teste 32: ■ B C D E