MAT-0321 – CÁLCULO INTEGRAL – PARTIÇÕES DA UNIDADE

PROF. ALEXANDRE LYMBEROPOULOS

1. INTRODUÇÃO E A TEORIA

Nestas poucas páginas vamos construir um conceito fundamental para a estender a integral, como definimos até agora, para conjuntos mais gerais. Isso será feito decompondo a função a ser integrada ao invés de trabalhar em seu domínio. O alcance dos resultados aqui obtidos vai além dos propósitos utilizados neste curso. As *Partições da Unidade* são uma ferramenta que permite "colar" resultados obtidos localmente, tornando-os globais. Aqui lidamos com funções definidas em subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, mas estes fatos generalizam-se para espaços topológicos Hausdorff e para-compactos, quando lidamos apenas com funções contínuas[1].

A colagem de funções contínuas definidas em conjuntos abertos ou fechados é dada pelo

Proposição 1.1 (Colagem de funções contínuas). *Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que uma das duas propriedades abaixo vale:*

(i) $B_1, \dots B_n$ é uma coleção finita de fechados tal que $A = \bigcup_{i=1}^{n} b_i$.
(ii) $\{B_i\}_{i\in I}$ é uma coleção qualquer de abertos tais que $A = \bigcup_{i\in I} B_i$.

Se $f_i\colon B_i \to \mathbb{R}^k$ são funções contínuas tais que $f_i\big|_{B_i\cap B_j} = f_j\big|_{B_i\cap B_j}$, existe uma única função contínua $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ tal que $f\big|_{B_i} = f_i$.

A demonstração desse fato segue diretamente do fato da continuidade ser uma propriedade local. Para funções diferenciáveis conseguimos um resultado semelhantes quando a condição (ii) do Lema acima é satisfeita:

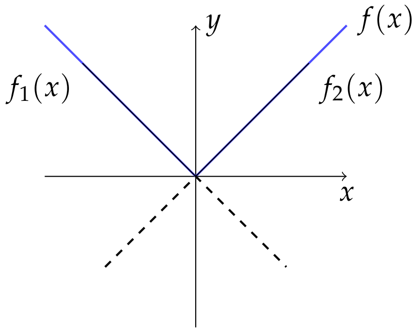
Proposição 1.2 (Colagem de funções diferenciáveis em abertos). *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\{B_i\}_{i\in I}$ é uma coleção qualquer de abertos tais que $A = \bigcup_{i\in I} B_i$. Se $f_i\colon B_i \to \mathbb{R}^k$ são funções diferenciáveis tais que $f_i\big|_{B_i\cap B_j} = f_j\big|_{B_i\cap B_j}$, existe uma única função diferenciável $f\colon A \to \mathbb{R}^k$ tal que $f\big|_{B_i} = f_i$.*

Novamente o argumento de localidade é utilizado para provar este resultado. Uma vez que percebemo isso, é natural perguntar se o mesmo não vale também para uma cobertura por fechados domínio. Em primeiro lugar é preciso definir o que é uma função diferenciável num conjunto fechado:

Definição 1.1 (Função diferenciável num conjunto fechado). Sejam $B \subseteq \mathbb{R}^n$ um fechado. Uma função $f\colon B \to \mathbb{R}^k$ é *diferenciável* se existem um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, contendo B e uma função diferenciável $\tilde{f}\colon A \to \mathbb{R}^k$ tal que $\tilde{f}\big|_B = f$.

[1] Na verdade a para-compacidade num espaço topológico Haustória é equivalente à existência de partições da unidade contínuas.

É importante verificar que a definição acima não depende da função $\tilde{f}$. Com essa definição temos que as funções $f_1\colon \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}$ e $f_2\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, dadas respectivamente por $f_1(x) = -x$ e $f_2(x) = x$, são diferenciáveis (utilize, por exemplo, como extensões as funções dadas pelas mesmas fórmulas). A interseção de seus domínios é um fechado, $\{0\}$, onde o valor de ambas é o mesmo. Porém, não existe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável tal que $f\big|_{\mathbb{R}_{\leq 0}} = f_1$ e $f\big|_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = f_2$. De fato, a única função que atende do pedido é $f(x) = |x|$, não diferenciável em $x_0 = 0$.



Para construir uma partição da unidade, precisamos de elementos básicos, as '*funções "bump"* em $\mathbb{R}^n$. Para isso, começamos com o

Lema 1.3. *A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por* $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ *é de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.*

Demonstração: Se $x_0 < 0$ ou $x_0 > 0$ é fácil ver que todas as derivadas de f existem em x_0.

Se $x_0 = 0$ então $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ e $f(0) = 0$, ou seja, f é contínua em x_0. Para verificar o grau de diferenciabilidade de f neste observamos inicialmente que se $x < 0$, então $f^{(k)}(x) = 0$. Se $x > 0$, temos

$$f^{(k)}(x) = p_k(x)\frac{e^{-1/x}}{x^{2k}},$$

para algum polinômio p_k de grau menor ou igual a k. Verificamos isto por indução:

- se $k = 0$, basta tomar $p_0(x) = 1$.
- supondo válida a expressão para um certo $k \geq 0$ temos

$$f^{(k+1)}(x) = \left(x^2 p_k'(x) + p_k(x) - 2kxp_k(x)\right)\frac{e^{-1/x}}{x^{2k+2}}.$$

Para garantir a existência de $f^{(k)}(0)$, basta considerar os limites laterais. Pela esquerda temos, obviamente, que são nulos para todo k. Pela direita, usando L'Hospital no segundo fator, temos

$$\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = \lim_{x\to 0^+} p_k(x)\frac{e^{-1/x}}{x^{2k}} = p_k(0) \times 0 = 0 = \lim_{x\to 0^-} f^{(k)}(x).$$

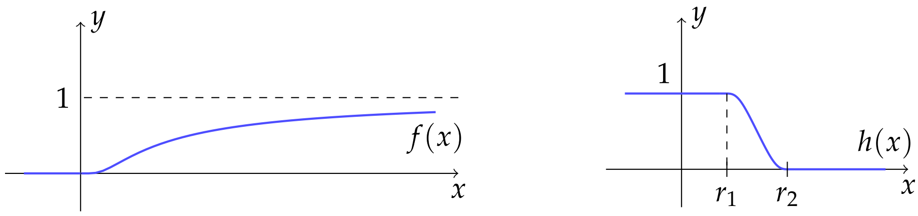
Isso mostra que cada derivada de ordem $k+1$ existe em $x_0 = 0$ e portanto a derivada de ordem k é contínua naquele ponto para todo k, como queríamos. O gráfico de f está na Figura 1a. $\square$

Este é um exemplo de uma função de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ que não é analítica, pois sua série de Taylor é nula e não coincide com a função em nenhum $x > 0$. Isso mostra que as técnicas utilizadas aqui não se generalizam para funções complexas.

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, então as funções de classe $\mathcal{C}^\infty(A)$ serão denotadas simplesmente por *funções suaves em A*.

Lema 1.4. *Dados $r_1 < r_2 \in \mathbb{R}$, existe uma função suave $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 1$, se $x \leq r_1$; $0 < h(x) < 1$, se $r_1 < x < r_2$ e $h(x) = 0$, se $x > r_2$.*

Demonstração: Tome
$$h(x) = \frac{f(r_2 - x)}{f(r_2 - x) + f(x - r_1)},$$
onde f é a função construída no Lema 1.3. Como $f(r_2 - x) + f(x - r_1) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que h atende ao pedido no enunciado. Veja o gráfico de h na Figura 1b. $\square$

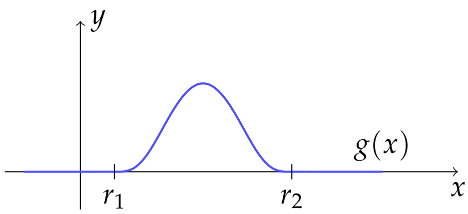


(A) Gráfico de $f(x)$ dada no Lema 1.3

(B) Gráfico de $h(x)$ dada no Lema 1.4

FIGURA 1. Gráficos das funções construídas acima.

A função h é chamada de *função cutoff*. Uma construção alternativa se dá utilizando as *funções bump*, dadas por expressões do tipo $g(x) = f\left(\frac{x-r_1}{r_2-r_2}\right) f\left(1 - \frac{x-r_1}{r_2-r_1}\right)$:



Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, denotamos por $B_r(x_0)$ a bola em $\mathbb{R}^n$, de raio r e centro em x_0 e por $\overline{B_r(x_0)}$ seu fecho. Podemos generalizar as construções acima para dimensões mais altas:

Teorema 1.5. *Dados $0 < r_1 < r_2 \in \mathbb{R}$, existe uma função suave $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $H(x) = 1$ se $x \in \overline{B_{r_1}(0)}$; $0 < H(x) < 1$, se $x \in B_{r_2}(0) \setminus \overline{B_{r_1}(0)}$ e $H(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_2}(0)$.*

Demonstração: Basta tomar $H(x) = h(|x|)$, onde h é a função dada no Lema 1.4. Esta função é a composta de h com $|\cdot|$, ambas suaves fora da origem. Numa vizinhança da origem H coincide com a função constante 1 e portanto também é diferenciável neste ponto. Veja um exemplo de tal função na Figura 2. $\square$

No resultado a seguir verificamos que o $\mathbb{R}^n$ é paracompacto, propriedade crucial para construção das partições da unidade.

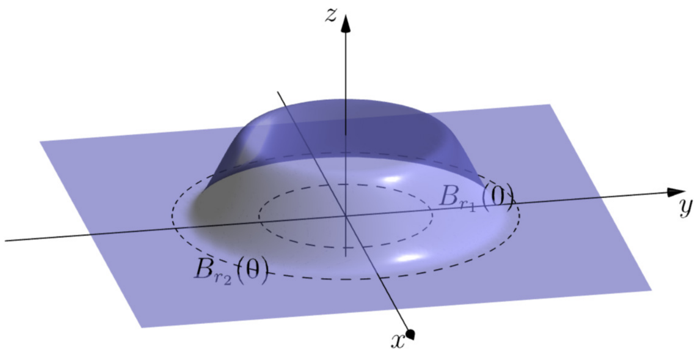


FIGURA 2. Gráfico de uma função bump em $\mathbb{R}^2$.

Lema 1.6 (Para-compacidade de $\mathbb{R}^n$). *Sejam $\mathcal{A}$ uma coleção qualquer de abertos em $\mathbb{R}^n$ e A sua reunião (um aberto, portanto). Então existe um coleção de bolas fechadas $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tais que*

i. $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$;
ii. cada B_i está contido num elemento da coleção A;
iii. todo ponto de A tem uma vizinhança que intersecta um número finito de bolas B_i.

Demonstração: É relativamente simples conseguir uma coleção de bolas que atenda as duas primeiras propriedades, mas atender a terceira é um pouco mais sofisticado. Começamos lembrando que todo aberto de $\mathbb{R}^n$ se escreve como a reunião de uma família crescente de compactos[2].

Seja então $\{D_i\}_{i=1}^n$ a família de compactos cobrindo A que, pela construção indicada, verifica $D_i \subseteq \operatorname{Int} D_{i+1}$. Para manter a consistência de notação definimos $D_i = \emptyset$, se $i \le 0$. Cada "coroa" $C_i = D_i \setminus \operatorname{Int} D_{i-1}$ é limitada, pois está contida em D_i e é fechada, pois é a interseção de fechados $D_i \bigcap(\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Int} D_{i-1})$, ou seja, cada C_i é compacto. Além disso, cada C_i é disjunto do fechado $D_{i-2} \subseteq \operatorname{Int} D_{i-1}$.

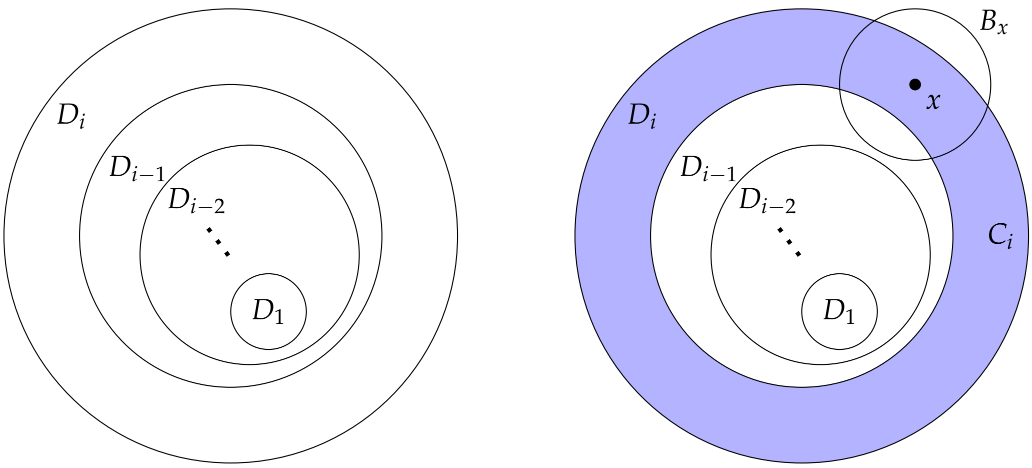


FIGURA 3. Construção dos compactos D_i, das coroas C_i e de uma bola B_x.

[2]Use a função distância de pontos do compacto até o complemento do aberto. Ela assume valor mínimo, use metade dessa distância para construir o próximo compacto, e repita o processo.

Para cada $x \in C_i$, escolhemos uma bola fechada B_x centrada em x, contida em A e disjunta de D_{i-2}, que tenha raio suficientemente pequeno para estar inteiramente contida num elemento da cobertura $\mathcal{A}$. Os interiores das bolas B_x cobrem C_i, escolhemos então uma quantidade finita dessas bolas que ainda cobre C_i e denote o conjunto dessas bolas por $\mathcal{B}_i$.

Seja $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}_i$ a coleção enumerável de bolas fechadas construídas acima. Por construção, cada elemento de $\mathcal{B}$ é uma bola contida num elemento de $\mathcal{A}$, cujos interiores cobrem A. De fato, se $x \in A$, seja i o menor inteiro tal que $x \in \operatorname{Int} D_i$. Logo $x \in C_i$, que é coberto pelos interiores das bolas em $\mathcal{B}_i$.

Falta verificar a última condição do enunciado. Para tanto, dado $x \in A$, temos que $x \in \operatorname{Int} D_i$, para algum i. Todas as bolas das coleções $\mathcal{C}_j$, $j \geq i+2$, são disjuntas de D_i. Deste modo, $\operatorname{Int} D_i$ intersecta somente bolas que estão nas coleções $\mathcal{B}_j$, $1 \leq j \leq i+1$ e, portanto, x admite uma vizinhança que intersecta somente um número finito de bolas da coleção $\mathcal{B}$. □

Observação 1.1. É importante notar que a última propriedade do Lema acima, a condição *localmente finita*, vale somente para pontos de A, mas não para pontos em sua fronteira. Na verdade, cada vizinhança aberta de $x \in \partial A$ intersecta *necessariamente* uma quantidade infinita de bolas da coleção $\mathcal{B}$.

Observação 1.2. Como mencionado anteriormente, o Lema 1.6 prova que $\mathbb{R}^n$ é para-compacto. Em espaços topológicos gerais essa condição não é satisfeita automaticamente e portanto é um propriedade adicional do espaço que, além de ser Hausdorff, devemos exigir se quisermos construir partições da unidade (apenas contínuas, no caso de espaços topológicos). Um teorema de Doudona garante que todo espaço Hausdorff e para-compacto é normal. Um exemplo de espaço topológico Hausdorff que não é para-compacto é o *plano de Sorgenfrey*. Quando estudamos variedades diferenciáveis é razoável pedir que sejam espaços topológicos Hausdorff e para-compactos.

Para definirmos o objeto em foco, precisamos da

Definição 1.2. O *suporte* de uma função $f\colon A \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in A \colon f(x) \neq 0\}}.$$

Em outras palavras, $x \notin \operatorname{supp} f$ se, e somente se, existe uma vizinhança aberta de x onde f é identicamente nula.

E então

Definição 1.3 (Partição Suave da Unidade)**.** Dada uma uma coleção qualquer de abertos em $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$, denote sua união por $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Uma *partição suave da unidade* para A é uma coleção $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$, de funções suaves $\varphi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que

i. $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$, para todos $x \in \mathbb{R}^n$ e $i \in I$;
ii. $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq A$, para cada $i \in I$;
iii. cada $x \in A$ tem uma vizinha que intersecta somente um número finito dos $\operatorname{supp} \varphi_i$ e
iv. $\sum\limits_{i \in I} \varphi_i(x) = 1$, para todo $x \in A$.

Se, além disso, a coleção Φ satisfaz, para todo $i \in I$

v. supp φ_i é compacto e
vi. supp $\varphi_i \subseteq A_i$,

dizemos que a partição da unidade tem *suporte compacto* e é *subordinada à cobertura $\mathcal{A}$ de A*, respectivamente.

Teorema 1.7 (Existência de Partições da Unidade)**.** *Sejam $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ um coleção de abertos de $\mathbb{R}^n$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sua reunião. Então existe uma partição da unidade suave, com suporte compacto e subordinada à cobertura $\mathcal{A}$.*

Demonstração: Dada a coleção de abertos $\mathcal{A}$, considere a coleção de bolas $\mathcal{B}$ construída no Lema 1.6. Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja $\psi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função bump cujo suporte é $B_i \in \mathcal{B}$, como as construídas no Teorema 1.5. Com isso temos que supp ψ_i é compacto e que cada ponto em A está contido num número finito das bolas B_i. A coleção $\Psi = \{\psi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ atende todas as condições da Definição 1.3, exceto iv.

A condição iii garante que a soma $\lambda(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \psi(x)$ tem um número finito de parcelas não nulas e portanto é convergente para todo $x \in A$, o qual está contido no interior de ao menos uma B_i e portanto $\psi_i(x) > 0$, donde $\lambda(x) > 0$. As funções $\varphi_i(x) = \dfrac{\psi_i(x)}{\lambda(x)}$ continuam verificando as mesmas propriedades das ψ_i e, para cada $x \in A$,

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi_i(x)}{\lambda(x)} = \frac{\lambda(x)}{\lambda(x)} = 1.$$

□

Corolário 1.8. *Se A é um conjunto qualquer (não necessariamente aberto) e $\mathcal{A} = \{A\}_{i\in I}$ é uma cobertura aberta de A, então existe uma partição da unidade em A.*

Demonstração: Basta observar que $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ é um aberto e portanto admite partição da unidade. □

2. Aplicações

Vejamos alguma aplicações das partições da unidade, concluindo com um extensão do conceito de integral para uma classe maior de domínios de integração. Começamos com a:

Proposição 2.1 (Função "bump" em um fechado qualquer)**.** *Sejam A um fechado qualquer e U um aberto contendo A. Então existe uma função suave $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $0 \le \psi(x) \le 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi \equiv 1$ em A e* supp $\psi \subseteq U$.

Demonstração: Considere a cobertura aberta $\{U_0 = U, U_1 = \mathbb{R}^n \setminus A\}$ e a partição da unidade $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ subordinada a ela. Para cada $x \in A$ temos $\varphi_1(x) = 0$ e então $\varphi_0(x) = 1$, sendo esta última a função procurada. □

Proposição 2.2 (Extensão suave de funções em fechados)**.** *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um fechado e $f\colon A \to \mathbb{R}$ uma função suave. Para todo aberto $U \supseteq A$, existe $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave tal que $\tilde{f}\big|_A = f$ e* supp $\tilde{f} \subseteq U$.

Demonstração: Para cada $p \in A$ tome uma vizinhança $V_p \subseteq U$ de p e uma função suave $\tilde{f}_p\colon V_p \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}_p$ coincide com f em $V_p \cap A$. Como $\{V_p\colon p \in A\} \cup (\mathbb{R}^n \setminus A)$ é uma cobertura a aberta de $\mathbb{R}^n$, tomamos a partição da unidade $\{\varphi_p\colon p \in A\} \cup \{\varphi_0\}$, subordinada a esta cobertura, de modo tal que supp $\varphi_p \subseteq V_p$ e supp $\varphi_0 \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$.

O produto $\varphi_p \tilde{f}_p$ é suave em V_p e, admite uma extensão suave a todo $\mathbb{R}^n$, definindo-a como 0 em $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} \varphi_p$. Tudo funciona bem pois a extensão proposta e $\varphi_p \tilde{f}_p$, coincidem no aberto $V_p \setminus \operatorname{supp} \varphi_p$. Definimos então $\tilde{f} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por

$$\tilde{f}(x) = \sum_{p \in A} \varphi_p(x) \tilde{f}_p(x),$$

que é suave pois, para cada x, é soma finita[3] de funções suaves. Para ver que esta é realmente uma extensão de f temos que, para cada $x \in A$, $\varphi_0(x) = 0$ e $\tilde{f}_p(x) = f(x)$ para todo p tal que $\varphi_p(x) \neq 0$. Logo,

$$f(x) = \sum_{p \in A} \varphi_p(x) \tilde{f}_p(x) = \left(\varphi_0(x) + \sum_{p \in A} \varphi_p(x) \right) \tilde{f}_p(x) = 1 \cdot f(x) = f(x).$$

Concluindo,

$$\operatorname{supp} \tilde{f} = \overline{\bigcup_{p \in A} \operatorname{supp} \varphi_p} = \bigcup_{p \in A} \operatorname{supp} \varphi_p \subseteq U.$$

$\square$

Para estender a integração que vimos em sala (conjuntos limitados, via funções características) precisamos primeiramente de algumas definições.

Definição 2.1 (Coberturas Admissíveis)**.** Uma cobertura aberta $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ de um aberto A é *admissível* $A_i \subseteq A$, para todo $i \in I$.

Dadas uma partição da unidade $\Phi = \{\phi_i\}_{i \in I}$, subordinada à cobertura $\mathcal{A}$ e admissível, e uma função $f \colon A \to \mathbb{R}$, localmente limitada e com conjunto de descontinuidades de medida nula, diremos que f é *integrável (no sentido extendido)* se $\sum\limits_{i \in I} \int_A \varphi_i(x) |f(x)| \, dx$, cujas parcelas podem ser rearranjadas como uma sequência, é convergente. Em particular $\sum\limits_{i \in I} \left| \int_A \varphi_i(x) f(x) \, dx \right|$ é convergente, ou ainda, $\sum\limits_{i \in I} \int_A \varphi_i(x) f(x) \, dx$ é absolutamente convergente.

Vamos verificar que o conceito acima independe da partição da unidade escolhida.

Teorema 2.3. *No contexto da definição acima,*

(i) se $\Psi = \{\psi_j\}_{j \in J}$ é outra partição da unidade admissível e subordinada à uma cobertura $\mathcal{A}'$, então

$$\sum_{j \in J} \int_A \psi_j(x) |f(x)| \, dx = \sum_{i \in I} \int_A \varphi_i(x) |f(x)| \, dx \quad e \quad \sum_{j \in J} \int_A \psi_j(x) f(x) \, dx = \sum_{i \in I} \int_A \varphi_i(x) f(x) \, dx.$$

(ii) Se A e f são limitados então f é integrável no sentido estendido.

(iii) Se A é J-mensurável (fronteira de medida nula) e f é limitada esta nova definição coincide com a vista em sala.

Demonstração:

(i) Uma vez que o suporte de $\varphi_i f$ é compacto e existe apenas um número finito das ψ_j cujo suporte intersecta esse compacto, temos que

$$\sum_{i \in I} \int_A \varphi_i(x) f(x) \, dx = \sum_{i \in I} \int_A \Big(\sum_{j \in J} \psi_j(x) \Big) \varphi_i(x) f(x) \, dx = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \int_A \psi_j(x) \varphi_i(x) f(x) \, dx$$

[3]Os suportes das φ_p são uma família localmente finita

Aplicando essa expressão para $|f|$ mostramos a convergência absoluta e portanto podemos inverter a ordem da soma, donde

$$\sum_{i\in I}\int_A \varphi_i(x)f(x)\,dx = \sum_{j\in J}\int_A \psi_j(x)f(x)\,dx.$$

(ii) Se A está contido num retângulo fechado R e $|f(x)| \le M$ para todo $x \in A$, então existe uma subcoleção finita $\Phi' \subset \Phi$, cujos suportes estão contidos em R, de modo que

$$\sum_{\varphi\in\Phi'}\int_A \varphi_i|f(x)|\,dx \le \sum_{\varphi\in\Phi'} M\int_A \varphi_i\,dx = M\int_A \sum_{\varphi\in\Phi'}\varphi_i \le M\cdot \mathrm{vol}(R)$$

(iii) Sejam $\epsilon > 0$ e C o compacto dado pelo Exercício 4. Apenas um número finito das φ_i não se anula em C. Denote por Φ' qualquer coleção finita que as contenha. Se $\int_A f(x)\,dx$ denota a integral como vimos em sala, então

$$\begin{aligned}
\left|\int_A f(x)\,dx - \sum_{\varphi\in\Phi'}\int_A \varphi(x)f(x)\,dx\right| &\le \int_A \left|f(x) - \sum_{\varphi\in\Phi'}\varphi(x)f(x)\right|\,dx\\
&\le M\int_A\left(1-\sum_{\phi\in\Phi'}\varphi(x)\right)\,dx\\
&= M\int_A \sum_{\phi\in\Phi\setminus\Phi'}\varphi(x)\,dx\\
&\le M\int_{A\setminus C} 1\,dx \le M\cdot\epsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

3. Exercícios

Exercício 1. Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases}\dfrac{1+\cos x}{2}, & \text{se } -\pi < x < \pi\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}$, que é suave.

Considere as funções φ_k, cujos gráficos são traslações de $k\pi/2$ unidades para a esquerda do gráfico de f, se k é par e de $(k-1)\pi/2$ unidades para direita, se k é impar. Veja a figura abaixo:

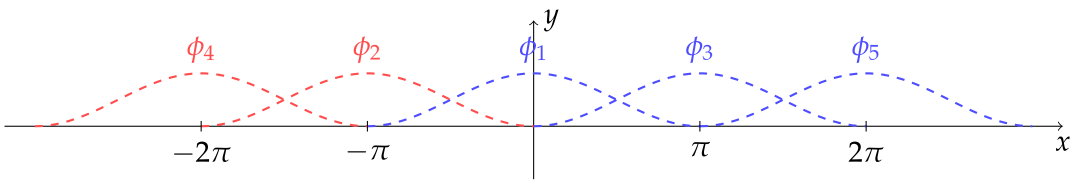


Figura 4. Uma partição da unidade em $\mathbb{R}$.

Determine o suporte de φ_k e mostre que cada $x\in\mathbb{R}$ pertence a, no máximo, três suportes dessas funções. Mostre finalmente que $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma partição da unidade em $\mathbb{R}$.

Exercício 2. Exiba um contraexemplo para a Proposição 2.2 quando o domínio original é aberto.

Exercício 3. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja A_n um fechado em $]n, n+1[$. Suponha que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $\int_{A_n} f(x)\,dx = \frac{(-1)^n}{n}$ e que $f(x) = 0$ se $x \notin A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Encontre duas partições da unidade para $\mathbb{R}$ nas quais a soma $\sum\limits_{\varphi \in \Phi} \int_{\mathbb{R}} \varphi f(x)\,dx$ converge absolutamente para valores distintos.

Exercício 4. Sejam A um conjunto J-mensurável e $\epsilon > 0$. Mostre que existe $C \subseteq A$, um compacto J-mensurável, tal que $\int_{A \setminus C} 1\,dx = \epsilon$.