Tensores, Produtos tensoriais e Produto exterior:

V. $\mathbb{R}$-espaço vetorial

$V^k = V \times V \times \ldots \times V$

$T: V^k \to \mathbb{R}$ é multilinear (ou k-tensor) se $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ temos

$T(v_1, \ldots, v_i + w_i, \ldots, v_k) = T(v_1, \ldots, v_i, \ldots v_k) + T(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k)$ e

$T(v_1, \ldots, \alpha v_i, \ldots, v_k) = \alpha T(v_1, \ldots, v_k)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\mathcal{J}^k(V) = \{T: V^k \to \mathbb{R} : T$ é k-tensor$\}$ é espaço vetorial com as operações

$(S+T)(v_1, \ldots, v_k) = \ldots$

$(\alpha T)(v_1, \ldots, v_k) = \ldots$

Se $S \in \mathcal{J}^k(V)$ e $T \in \mathcal{J}^l(V)$ o produto tensorial de S por T é $S \otimes T \in \mathcal{J}^{k+l}(V)$ dado por

$$(S \otimes T)(v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+l}) = S(v_1, \ldots, v_k) \cdot T(v_{k+1}, \ldots, v_{k+l})$$

Obs.: $S \otimes T \neq T \otimes S$.

Propriedades:
- $(S_1 + S_2) \otimes T = S_1 \otimes T + S_2 \otimes T$
- $S \otimes (T_1 + T_2) = S \otimes T_1 + S \otimes T_2$
- $(\alpha S) \otimes T = S \otimes (\alpha T) = \alpha (S \otimes T)$.
- $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$. (escrevemos $S \otimes T \otimes U$)

Obs.: $\mathcal{J}^1(V) = V^*$

<u>Teorema</u>: Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V e $\{\varphi^1, \ldots, \varphi^n\}$ base de V^*, $\varphi^i(v_j) = \delta_{ij}$

Então os k-tensores $\varphi_{i_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{i_k}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$ são base para $\mathcal{J}^k(V)$.

Em particular $\dim \mathcal{J}^k(V) = n^k$.

Dem.: $\varphi_{i_1} \otimes \ldots \varphi_{i_k}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}) = \begin{cases} 1, & i_l = j_l, \forall l \\ 0, & \text{c.c} \end{cases}$

Se $w_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j$ e $T \in \mathcal{J}^k(V)$ então

$T(av_1+bv_2, cv_1+dv_2)$
$= ac\, T(v_1,v_1) + ad\, T(v_1,v_2) + bc\, T(v_2,v_1) + bd\, T$

$$T(w_1,\dots,w_k) = \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} a_{1j_1}\dots a_{kj_k}\, T(v_{j_1},\dots,v_{j_k})$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \varphi_{i_1}(w_1)\dots\varphi_{i_k}(w_k)\, T(v_{i_1},\dots,v_{i_k}).$$

$$\Longrightarrow T = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} T(v_{i_1},\dots,v_{i_k})\, \varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k}.$$

$\Longrightarrow \mathcal{J}^k = \text{span}\{\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k}\}.$

Suponha que $\sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1\dots i_k}\cdot\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k} = 0$

Calculado em $(v_{j_1},\dots,v_{j_k}) \Rightarrow a_{j_1\dots j_k} = 0 \Rightarrow$ é l.i.

$f: V \to W$ linear e $T \in \mathcal{J}^k(W)$ definimos

$f^*T \in \mathcal{J}^k(V)$ por $f^*T(v_1,\dots,v_k) = T(f(v_1),\dots,f(v_k))$

Temos então a aplicação linear $f^*: \mathcal{J}^k(W) \to \mathcal{J}^k(V)$, que satisfaz

$f^*(S\otimes T) = f^*S \otimes f^*T$, $S \in \mathcal{J}^k(W)$ e $T \in \mathcal{J}^l(W)$.

Exemplos: 1) $\mathcal{J}^1(V) = V^*$

2) $\langle\, ,\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ produto interno usual. $\langle\, ,\rangle \in \mathcal{J}^2(\mathbb{R}^n)$ é simétrico e positivo definido.

Teorema: Se T é um produto interno em V existe base o.n. $v_1,\dots,v_n$, ie, $T(v_i,v_j) = \delta_{ij}$ e um isomorfismo $f: \mathbb{R}^n \to V$ tq. $f^*T = \langle\, ,\rangle$.

Dem.: $\{w_1,\dots,w_n\}$ base de $V \Rightarrow w_1' = w_1$; $w_2' = w_2 - \frac{T(w_2,w_1')}{T(w_1',w_1')}\cdot w'$, etc

e tal que $T(w_i',w_j') = 0$, $i \neq j$ e $v_i = \frac{w_i'}{\sqrt{T(w_i',w_i')}}$ satisfaz $T(v_i,v_j) = \delta_{ij}$

Define $f: \mathbb{R}^n \to V$ por $f(e_i) = v_i$.

3) $\det \in \mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$ é linear nas colunas e alternado: troca de colunas troca o sinal de det.

Def.: Um k-tensor $\omega \in \mathcal{T}^k(V)$ é alternado se

$$\omega(v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots v_k) = -\omega(v_1,\dots,v_j,\dots,v_i,\dots,v_n),\ \forall v_1,\dots v_k \in V$$

$\Lambda^k(V) = \{\omega \in \mathcal{T}^k(V) : \omega \text{ é alternado}\}$ é subespaço de $\mathcal{T}^k(V)$.

Permutações: $S_n = \{\sigma : \sigma: \{1,\dots,n\} \circlearrowleft \text{ é bijetora}\}$ é grupo com $n!$ elementos. Tipicamente $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

σ se escreve como produto de ciclos disjuntos

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5\ 6\ 3\ 2)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4\ 5)$$

ciclos disjuntos comutam

produtos de transposições: $(1\ 4\ 5\ 6\ 3\ 2) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)$

(não único, mas mesma paridade!) (*) $(1\ 2)(3\ 4\ 5) = (1\ 2)(3\ 5)(3\ 4)$

$$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1, & \text{se tem nº par de transp} \\ -1, & \text{'' '' '' ímpar '' ''.} \end{cases}$$

(*) $\sigma \in S_n$, τ transposição

#órbitas de σ − #órbitas de $\tau\sigma$ $= 1$

$\tau = (i\ j)$, i,j órbitas distintas $\Rightarrow$ i,j na mesma órbita de $\tau\sigma$

i,j mesma órbita $\Rightarrow$ i,j em órbitas distintas de $\tau\sigma$

$\sigma \in S_n$ com nº par e ímpar de órbitas. $id = \sigma\,\sigma^{-1}$ (par, ímpar)

$\tau_{2m+1}\tau_{2m}\dots\tau_1 id = id$

Se $T \in \mathcal{T}^k(V)$ definimos $\operatorname{Alt}(T)(v_1,\dots,v_n) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma\, T(v_{\sigma(1)},\dots v_{\sigma(k)})$

Teorema: (i) $T \in \mathcal{T}^k(V) \Rightarrow \operatorname{Alt}(T) \in \Lambda^k(V)$.

(ii) $\omega \in \Lambda^k(V) \Rightarrow \operatorname{Alt}(\omega) = \omega$.

(iii) $T \in \mathcal{T}^k(V) \Rightarrow \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(T)) = \operatorname{Alt}(T)$.

Dem.: (i) para $\sigma \in S_k$ Tome $\sigma' = \sigma \circ (i\, j)$ daí

$$\mathrm{Alt}(T)(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots v_n) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(j)}, \dots, v_{\sigma(i)}, \dots v_{\sigma(k)})$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\,\sigma.\, T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(i)}, \dots, v_{\sigma'(j)}, \dots, v_{\sigma'(k)})$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma' \in S_k} -\mathrm{sgn}\,\sigma'\, T(v_{\sigma'(1)}, \dots, v_{\sigma'(n)}) = -\mathrm{Alt}(T)(v_1, \dots, v_k).$$

(ii) $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\sigma = (i\, j) \Rightarrow \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}\,\sigma.\,\omega(v_1, \dots, v_k)$,

vale $\forall \sigma \in S_n$. Logo

$$\mathrm{Alt}(\omega)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\,\sigma\; \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}\,\sigma.\,\mathrm{sgn}\,\sigma\; \omega(v_1, \dots, v_k)$$

$$= \omega(v_1, \dots, v_k)$$

(iii) direto de (i) e (ii).

Se $\omega \in \Lambda^k(V)$ e $\eta \in \Lambda^l(V)$ nem sempre $\omega \otimes \eta \in \Lambda^{k+l}(V)$.

Definimos um produto "fechado" nas formas alternadas por

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!\, l!}\,\mathrm{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

Propriedades: $(\omega_1 + \omega_2)\wedge\eta = \omega_1\wedge\eta + \omega_2\wedge\eta$

$\omega \wedge (\eta_1 + \eta_2) = \omega\wedge\eta_1 + \omega\wedge\eta_2$

$a\omega\wedge\eta = \omega\wedge a\eta = a(\omega\wedge\eta)$

$\omega\wedge\eta = (-1)^{kl}\,\eta\wedge\omega$

$f^*(\omega\wedge\eta) = f^*(\omega)\wedge f^*(\eta)$.

Teorema: (i) $S\in\mathcal{T}^k(V)$ e $T\in\mathcal{T}^l(V)$ com $\mathrm{Alt}(S)=0$ então

$$\mathrm{Alt}(S\otimes T)=\mathrm{Alt}(T\otimes S)=0.$$

(ii) $\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta))$

(iii) Se $\omega\in\Lambda^k(V)$, $\eta\in\Lambda^l(V)$ e $\theta\in\Lambda^m(V)$ então

$$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta=\omega\wedge(\eta\wedge\theta)=\frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!}\,\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)\in\Lambda^{k+l+m}(V).$$

Dem.: $(k+l)!\,\mathrm{Alt}(S\otimes T)(v_1,\dots,v_{k+l})$

$$=\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}\sigma.\,S(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}).\,T(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$$

$$G=\{\sigma\in S_{k+l}:\sigma \text{ fixa } k+1,\dots,k+l\}\Rightarrow G\leqslant S_{k+l}$$

$$\Rightarrow\sum_{\sigma\in G}\operatorname{sgn}\sigma\, S(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}).\,T(v_{\sigma(k+1)},\dots v_{\sigma(k+l)})=\underbrace{\Big(\qquad\qquad\Big)}_{=0}T(\cdots)$$

Se $\sigma_0\notin G$ tome a classe lateral $G\sigma_0=\{\sigma.\sigma_0:\sigma\in G\}$

Então $\displaystyle\sum_{\sigma\in G.\sigma_0}\operatorname{sgn}\sigma\, S(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(k)}).\,T(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)})$

$$=\operatorname{sgn}\sigma_0.\underbrace{\Big(\sum_{\sigma'\in G}\operatorname{sgn}\sigma'.\,S(w_{\sigma'(1)},\dots,w_{\sigma'(k)})\Big)}_{0}.\,T(w_{k+1},\dots,w_{k+l})=0,$$

onde $w_i=v_{\sigma_0(i)}$.

Como $\sigma_0\neq id\Rightarrow G\cap G\sigma_0=\emptyset$ e mais $S_{k+l}=\dot{\bigcup}\,G.\sigma_0$

A soma em cada classe nula $\Rightarrow$ soma nula em todo S_{k+l}.

(ii) $\mathrm{Alt}\big(\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta) - \eta\otimes\theta\big) = \mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta) - \mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta) = 0$

Logo

$$0 = \mathrm{Alt}\big(\omega\otimes[\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta) - \eta\otimes\theta]\big) = \mathrm{Alt}(\omega\otimes\mathrm{Alt}(\eta\otimes\theta)) - \mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta)$$

(iii) $$(\omega\wedge\eta)\wedge\theta = \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!}\,\mathrm{Alt}\Big(\overset{\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta)}{\overset{\shortparallel}{\omega\wedge\eta}}\otimes\theta\Big)$$

$$= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!\,m!}\cdot\frac{(k+l)!}{k!\,l!}\,\mathrm{Alt}(\omega\otimes\eta\otimes\theta),$$

<u>Teorema</u>: Sejam V um espaço vetorial, $\{v_1,\dots,v_n\}$ uma base de V e $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ sua base dual. Então $\mathcal{B} = \{\varphi_{i_1}\wedge\varphi_{i_2}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k} : 1\leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$ é base de $\Lambda^k(V)$ e portanto $\dim\Lambda^k(V) = \binom{n}{k}$

Dem: ·) $\omega\in\Lambda^k(V) \Rightarrow \omega\in\mathcal{T}^k(V) \Rightarrow \omega = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} a_{i_1\dots i_k}\,\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k}$

$$\omega = \mathrm{Alt}(\omega) = \sum_{i_1\dots i_k=1}^{n} a_{i_1\dots i_k}\,\underbrace{\mathrm{Alt}(\varphi_{i_1}\otimes\dots\otimes\varphi_{i_k})}_{\frac{1}{k!}\varphi_{i_1}\wedge\varphi_{i_2}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k}} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ gera } \Lambda^k(V).$$

·) $\sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} a_{i_1\dots i_k}\,\varphi_{i_1}\wedge\dots\wedge\varphi_{i_k} = 0$ calcula em $(v_{i_1},\dots,v_{i_k})$ dá l.i.

Obs: V, $\dim V = n \Rightarrow \dim\Lambda^n(V) = 1 \Rightarrow \omega\in\Lambda^n(V)$ é da forma $\omega = \alpha\lambda$, $\lambda\in\Lambda^n(V)$, $\lambda\not\equiv 0$ e $\alpha\in\mathbb{R}$. Se $V=\mathbb{R}^n$ todos são múltiplos do det.

<u>Teorema</u>: $\{v_1,\dots,v_n\}$ base de V e $\omega\in\Lambda^n(V)$. Se $\mu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j$ então

$\omega(\mu_1,\dots,\mu_n) = \det(a_{ij})\,\omega(v_1,\dots,v_n)$.

Dem: Defina $\eta\in\mathcal{T}^n(\mathbb{R}^n)$ por $\eta((a_{11},\dots,a_{1n}),(a_{21},\dots,a_{2n}),\dots,(a_{n1},\dots,a_{nn}))$

$= \omega\big(\sum a_{1j}v_j, \sum a_{2j}v_j,\dots,\sum a_{nj}v_j\big) \Rightarrow \eta\in\Lambda^n(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \eta = \alpha.\det$, $\alpha\in\mathbb{R}$, onde

$\alpha = \eta(e_1,\dots,e_n) = \omega(v_1,\dots,v_n)$

c) Orientação de V

$\omega \in \Lambda^n(V)$ não nula divide as bases de V em dois conjuntos:
aquelas onde $\omega(v_1,\dots,v_n) > 0$ e aquelas onde $\omega(v_1,\dots,v_n) < 0$.
Duas bases estão no mesmo conjunto se e só se a mudança de base
tem det > 0. Isso independe de ω pois se $\omega(v_1,\dots,v_n) > 0$ e
$\omega(u_1,\dots,u_n) > 0$ com $u_i = \sum a_{ij} v_j \Rightarrow \omega(u_1,\dots,u_n) = \det(a_{ij})\,\omega(v_1,\dots,v_n)$
e $\eta(u_1,\dots,u_n) = \det(a_{ij})\,\eta(v_1,\dots,v_n)$.

Cada um desses grupos é uma orientação de V.

Notação: $[v_1,\dots,v_n]$ = {bases de mesma orientação que $\{v_1,\dots,v_n\}$}.
$-[v_1,\dots,v_n]$ = {bases de orientação oposta...}

Orientação usual de $\mathbb{R}^n$ é da base canônica (orientação positiva).

Em $\mathbb{R}^n$, $\det(\cdot) \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ é a única $\omega \in \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$ tal que $\omega(Id) = 1$.

Para V em geral suponha que T é um produto ~~interno~~ sobre V.

Se $\{v_1,\dots,v_n\}$ e $\{w_1,\dots,w_n\}$ são b.o.n e $w_i = \sum a_{ij} v_i$ então

$$\delta_{ij} = T(w_i,w_j) = \sum a_{ik} a_{jl}\, T(v_k,v_l) = \sum a_{ik} a_{jk}$$

$$\Rightarrow A = (a_{ij}) \text{ satisfaz } A.A^T = Id. \Longrightarrow \det A = \pm 1.$$

Se $\omega \in \Lambda^n(V)$ satisfaz $\omega(v_1,\dots,v_n) = \pm 1$ então $\omega(w_1,\dots,w_n) = \pm 1$.

Dada uma orientação $\mu = [v_1 \dots v_n]$ para V existe uma única
$\omega \in \Lambda^n(V)$ tal que $\omega(v_1,\dots,v_n) = 1$. Tal ω é o elemento de volume
de V dado por μ e T.

det é o elemento de volume dado por $\langle , \rangle$ e $[e_1,\dots,e_n]$, satisfaz
$|\det(v_1,\dots,v_n)|$ é o volume do paralelepípedo.

- Produto vetorial:

$v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$. Defina $\varphi \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ por $\varphi(w) = \det(v_1, \dots, v_{n-1}, w)$

$\varphi \in V^* \Rightarrow \exists!\, z \in \mathbb{R}^n$ tq $\varphi(w) = \langle w, z \rangle$.

z é denotado por $z = v_1 \times \dots \times v_{n-1}$ é chamado produto vetorial

Propriedades:

1) $v_{\sigma(1)} \times \dots \times v_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn}\sigma (v_1 \times \dots \times v_n)$

2) $v_1 \times \dots \times \alpha v_i \times \dots \times v_{n-1} = \alpha (v_1 \times \dots \times v_n)$

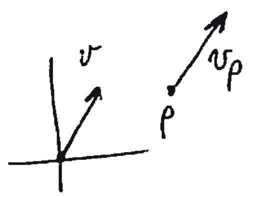
3) $v_1 \times \dots \times v_i + w_i \times \dots \times v_{n-1} = v_1 \times \dots \times v_i \times \dots v_{n-1} + v_1 \times \dots \times w_i \times \dots \times v_{n-1}$

4) $\langle v_1 \times \dots \times v_{n-1}, v_i \rangle = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1.$

Campos de vetores e formas diferenciais

- $p \in \mathbb{R}^n$. O espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em p é o conjunto

$$\mathbb{R}^n_p = \{ (p, v) : v \in \mathbb{R}^n \}.$$



operações: $(p, v) + (p, w) = (p, v + w)$

$\alpha(p, v) = (p, \alpha v)$

Notação: $v_p = (p, v)$

Produto interno em $\mathbb{R}^n_p$: $\langle v_p, w_p \rangle_p = \langle v, w \rangle$

orientação usual em $\mathbb{R}^n_p$: $[(e_1)_p, \dots, (e_n)_p]$.

$T\mathbb{R}^n = \{ (p, v_p) : p \in \mathbb{R} \text{ e } v_p \in \mathbb{R}^n_p \}$

Um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$ é uma função $F : \mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n$,

$F(p) = v_p = F^1(p).(e_1)_p + \dots + F^n(p)(e_n)_p,$

$F^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$

F é difvel se cada F^i o for.

Usamos a mesma definição para abertos de $\mathbb{R}^n$.

$\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) = \{ F : F$ é campo de vetores em $\mathbb{R}^n \}$