

Differential exterior

(12)

$$f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^n) \Rightarrow df = Df \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$$

Vamos generalizar d para ~~$\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$~~ k -formas:

$$\text{Se } \omega = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} w_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} \text{ então}$$

$$d\omega := \sum_{i_1 < \dots < i_k} dw_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial w_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

$$\text{Exemplo: } \omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2); \omega = Pdx + Qdy \Rightarrow$$

$$d\omega = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy$$

$$= \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dy \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$$

$$d(d\omega) = 0 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^2) \text{ "}$$

$$\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3), \omega = Pdx + Qdy + Rdz, d\omega = ?$$

Teorema: (i) $d(\omega + \eta) = d\omega + d\eta$

(ii) ω é k -forma e η é l -forma

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

(iii) $d(d\omega) = 0$

(iv) ω é k -forma em $\mathbb{R}^m$ e $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é difeol então

$$f^*(d\omega) = d(f^*\omega).$$

Dem. (i) $\leq$

(ii) Se ω é k -forma canônica, $\omega = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$
e η é l -forma canônica, $\eta = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$

$$\Rightarrow d\omega = 0 \text{ e } d\eta = 0 \text{ e } d(\omega \wedge \eta) = 0$$

~~Se~~ Se ω é 0-forma $\Rightarrow \omega = f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ entao

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= f \cdot \eta \text{ e } d(\omega \wedge \eta) = d(f\eta) = \sum \left(\sum_{i_1, \dots, i_l} f \eta_{i_1, \dots, i_l} \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} \\ &= d \left(\sum_{i_1, \dots, i_l} f \eta_{i_1, \dots, i_l} \cdot dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_l} \right) = \dots \end{aligned}$$

$$(iii) d(d\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left(\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \omega_{i_1, \dots, i_k} \right) dx_\beta \wedge dx_\alpha \right) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

os termos trocados em α e β se anulam

(iv) Se ω é 0-forma $\omega = g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f^*(dg) = dg_{f(p)}(df_p(v_p))$

$$\begin{aligned} f^*(dg)_p(v_p) &= dg_{f(p)}(df_p(v_p))_{f(p)} \\ &= d(g \circ f)_p(v_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(dg) &= d(f^*g) \\ &= d(g \circ f) \end{aligned}$$

$$d(f^*g)_p(v_p) = d(g \circ f)_p(v_p)$$

Se vale p/k -forma ω entao $f^*(d\omega \wedge dx_i) = f^*(d\omega \wedge dx_i + (-1)^k \omega \wedge d(dx_i))$

$$d(f^*\omega \wedge f^*dx_i) = d(f^*\omega) \wedge f^*dx_i + \dots$$

$$= f^*(d\omega \wedge dx_i) = f^*d\omega \wedge f^*dx_i$$

$$= f^*(d\omega \wedge dx_i) = f^*(d\omega \wedge dx_i)$$

$$= f^*(d\omega \wedge dx_i) = f^*(d\omega \wedge dx_i)$$

$$= df^*\omega \wedge f^*dx_i = d(f^*\omega \wedge f^*dx_i)$$

$$= d(f^*(\omega \wedge dx_i))$$

Obs.: $d: \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \rightarrow \Lambda^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ definida acima é a única linear com as propriedades acima.

Definição: $\omega \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ é fechada se $d\omega = 0$ e é exata se existe $\eta \in \Lambda^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ tal que $d\eta = \omega$.

Toda forma ~~fechada~~ exata é fechada. Vale a recíproca?

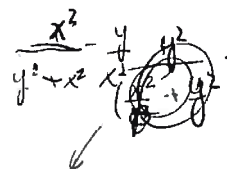
Exemplo: $\omega = Pdx + Qdy \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \in \Lambda^2(\mathbb{R}^2)$.

$d\omega = 0 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Existe $f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^2)$ tal que $\omega = df$, ou seja,

$\frac{\partial f}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ (Defina, $f(x,y) = \int_0^x P(t,0) dt + \int_0^y Q(x,t) dt$)

Se ω está definida apenas num subconjunto de $\mathbb{R}^2$, f pode não existir. Se $\omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ é dada por

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$



Se f é tal que $df = \omega$ então $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + g(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{x} + g'(y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + k,$$

definida somente em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,y): y \in \mathbb{R}\}$. Logo, não existe $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$

tal que $df = \omega$.

Suponha que $\omega = \sum w_i dx_i \in \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$ é exata com $\omega = df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ e $f(0)=0$. Então ~~como~~ $f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt$

$$= \int_0^1 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) \cdot x_i dt = \int_0^1 \sum w_i(tx) \cdot x_i dt.$$

Para encontrar f devemos considerar $Iw(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n w_i(tx) \cdot x_i dt$

que por fim, verifica-se que w está definida num conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, ou seja, para todo $x \in A$ o segmento ligando 0 a x está contido em A .

Em particular, ~~em particular~~, temos

$$\frac{\partial f(tx_1, tx_2)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, tx_2)$$

$$d(Iw) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (w_i(tx) \cdot x_i) dx_\alpha \right) dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_\alpha}(tx) \cdot tx_i + w_i(tx) \cdot x_i \right) dx_\alpha dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_\alpha}(tx) \cdot tx_i dx_\alpha + w_i(tx) dx_i \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_\alpha}(tx) \cdot tx_i dx_\alpha \right) + \sum_{i=1}^n w_i(tx) dx_i \right] dt$$

$$= \sum_{\alpha=1}^n \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_\alpha}(tx) \cdot tx_i \right) dt \right) dx_\alpha + w$$

$$I(dw) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_\alpha}(tx) \cdot tx_i dx_\alpha \right) x_i dt$$

$$I(dw) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_\alpha}(tx) \cdot tx_i dx_\alpha dx_j \right) x_i dt$$

$$Iw = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\int_0^1 w_i(tx) \cdot x_i dt \right) \Rightarrow d(Iw) = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial (w_i(tx) \cdot x_i)}{\partial x_\alpha} dx_\alpha \right) dt$$

$$w = \sum_{j=1}^n w_j(tx) dx_j \Rightarrow dw = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial w_j}{\partial x_\alpha}(tx) \cdot tx_\alpha dx_\alpha \right) dx_j$$

$dw = 0 \Rightarrow \frac{\partial w_j}{\partial x_\alpha}(tx) \cdot tx_\alpha = 0, \alpha \neq j$ Bem feito na página (15) depois da (18).

Em geral, temos o Lema de Poincaré:

Teorema: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto estrelado relativo à origem então toda forma fechada é exata.

Dem.: Depois.

Cadeias e integração:

Definição: Um n -cubo singular em $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma função

$c: [0,1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ contínua.

Uma n -cadeia em A é uma soma formal de n -cubos com coeficientes inteiros

Exemplos: um 0-cubo é um ponto em A

um 1-cubo é uma curva, etc.

um n -cubo c é a n -cadeia $1 \cdot c$.

Operações com n -cadeias: soma e multiplicação por inteiros

Exemplos: $2(c_1 + 3c_4) + (-2)(c_1 + c_3 + c_2) = -2c_2 - 2c_3 + 6c_4$.

Definição: Se c é uma n -cadeia em A , o bordo de c é uma $(n-1)$ -cadeia denotada por ∂c e definida pelos seguintes parâmetros:

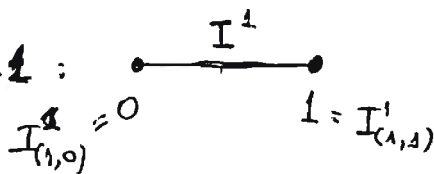
1) se I^n é o n -cubo dado pela identidade definimos dois $(n-1)$ cubos

$I_{(i,0)}^n$ e $I_{(i,1)}^n$ por:

$$I_{(i,0)}^n(x) = I^n(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$$I_{(i,1)}^n(x) = I^n(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Exemplos: se $n=1$:



se $n=2$:

