Em geral, temos o Lema de Poincaré:

<u>Teorema</u>: Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto estrelado relativo à origem então toda forma fechada é exata.

Dem.: Depois.

x

Cadeias e integração:

Definição: Um n-cubo singular em $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma função $c:[0,1]^n \to A$ contínua.

Uma n-cadeia em A é uma soma formal de n-cubos com coeficientes inteiros

Exemplos: um 0-cubo é um ponto em A
um 1-cubo é uma curva, etc.
um n-cubo c é a n-cadeia $1 \cdot c$.

Operações com n-cadeias: soma e multiplicação por inteiros

Exemplo: $2(c_1+3c_4)+(-2)(c_1+c_3+c_2) = -2c_2-2c_3+6c_4$.

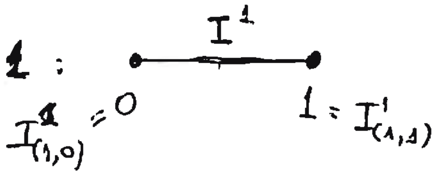
Definição: Se c é uma n-cadeia em A, <u>o bordo</u> de c é uma $(n-1)$-cadeia denotada por ∂c e definida pelos seguintes passos:

1) se I^n é o n-cubo dado pela identidade definimos dois $(n-1)$ cubos $I^n_{(i,0)}$ e $I^n_{(i,1)}$ por:

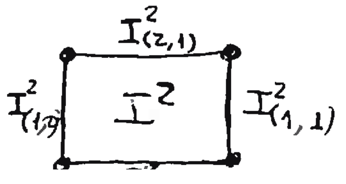
$$I^n_{(i,0)}(x) = I^n(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n) = (x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i+1},\dots,x_n)$$

$$I^n_{(i,1)}(x) = I^n(x_1,\dots,x_{i-1},1,x_{i+1},\dots,x_n)$$

Exemplos: se $n=1$:



se $n=2$:



· Para o n-cubo I^n definimos

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \underbrace{I^n_{(i,\alpha)}}_{(i,\alpha)\text{-face de } I^n}.$$

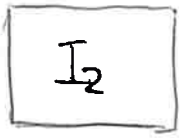
2) Para um n-cubo singular $c : [0,1]^n \to A$ definimos sua (i,α) face: $c_{(i,\alpha)} = c \circ (I^n_{(i,\alpha)})$

e então seu bordo $\partial c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}$.

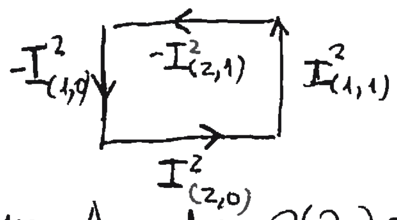
3) Para uma n-cadeia $c = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ definimos

$$\partial c = \partial\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial c_i.$$

Exemplo,



$$\partial I^2 = -I^2_{(1,0)} + I^2_{(1,1)} + I^2_{(2,0)} - I^2_{(2,1)}$$



Teorema: Se c é uma n-cadeia em A então $\partial(\partial c) = 0$.

Dem.: Sejam $i \leq j$ e considere $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$, a (j,β) face da (i,α)-face de I^n. Se $x \in [0,1]^{n-2}$ então

$$(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) = I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x))$$
$$= I^n_{(i,\alpha)}(x^1, \dots, x^{j-1}, \beta, x^{j+1}, \dots, x^{n-2})$$
$$= I^n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x^{i+1}, \dots, x^{j-1}, \beta, x^{j+1}, \dots, x^{n-2}).$$

Analogamente $(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)} = I_n(x^1, \dots, x^{i-1}, \alpha, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, \beta, x_{j+1}, \dots, x_{n-2})$.

Logo $(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ se $i \leq j$.

Para um n-cubo singular c temos então que

$$(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)} \text{ se } i \leq j. \text{ Então}$$

$$\partial(\partial c) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} c_{(i,\alpha)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \partial c_{(i,\alpha)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=0,1} (-1)^{j+\beta} (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} \sum_{j=1}^{n} \sum_{\beta=0,1} (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$$

Os termos $(c_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$ e $(c_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ se cancelam, logo $\partial(\partial c) = 0$.

Claramente o resultado se extende para n-cadeias.

Assim como para o operador d das formas diferenciais podemos nos perguntar se o resultado acima tem recíproca: se c é uma n-cadeia tal que $\partial c = 0$ existe $n+1$ cadeia d tal que $\partial d = c$? Depende de A.

Por exemplo, defina $c : [0,1]^1 \to \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por $c(t) = (\sin 2\pi n t, \cos 2\pi n t)$ $n \geq 0$ inteiro. $\partial c = -I^1_{(1,0)} + I^1_{(1,1)} = -c(I^1_{(1,0)}) + c(I^1_{(1,1)}) = -c(0) + c(1) = 0$

Não existe 2-cadeia d em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ tal que $\partial d = c$.

Integração de k-formas (em k-cadeias): $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto.

$d: \Omega^k(A) \to \Omega^{k+1}(A)$ satisfaz $d^2 \equiv 0$

$\partial: \{k\text{-cadeias}\} \to \{k-1\text{-cadeias}\}$ satisfaz $\partial^2 \equiv 0$ Alguma relação?

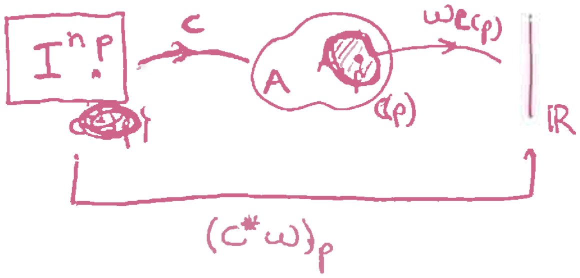
Todos k-cubos singulares agora são funções diferenciáveis.

Se $\omega \in \Omega^k([0,1]^k)$ então $\omega = f\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, $f \in C^\infty([0,1]^k)$.

Definimos então $\displaystyle\int_{[0,1]^k} \omega = \int_{[0,1]^k} f$ ou $\displaystyle\int_{[0,1]^k} f\, \overbrace{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k}^{\text{forma volume em cada } \mathbb{R}^k_p} = \int_{[0,1]} f(x_1, \dots, x_k)\, dx_1 \dots dx_k$

Se $\omega \in \Omega^k(A)$ e c é um k-cubo singular em A então definimos

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^* \omega$$



Se $k=0$ então $\omega = f \in C^\infty(A)$ e 0-cubo singular é $c: \{0\} \to A$ e então definimos $\displaystyle\int_c \omega = \omega(c(0)) = f(c(0))$.

Se c é k-cadeia, $c = \sum a_i c_i$ então $\displaystyle\int_c \omega = \sum a_i \int_{c_i} \omega$

Exemplos: 1) $k=1$: $c: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva, $c(t) = (c_1(t), c_2(t))$
$n=2$ $\omega = P dx + Q dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

$$\int_c \omega = \int_c P dx + Q dy = \int_{[0,1]} c^*(P dx + Q dy)$$

$$= \int_{[0,1]} P \circ c \cdot dx_{c(t)}(dc_*(t)) + Q \circ c \cdot dy_{c(t)}(dc_*(t))$$

$$= \int_0^1 P(c(t)) \cdot c_1'(t) + Q(c(t))\, c_2'(t).$$ (integral de linha usual)

2) $K=2$, $n=3$ $\quad c:[0,1]^2\to\mathbb{R}^3,\ c(s,t)=(c_1(s,t),c_2(s,t),c_3(s,t))$

$\omega\in\Omega^2(\mathbb{R}^3)\Rightarrow \omega = P\,dx\wedge dy + Q\,dx\wedge dz + R\,dy\wedge dz$

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^2} c^*\omega = \int_{[0,1]^2} c^*(P\,dx\wedge dy + Q\,dx\wedge dz + R\,dy\wedge dz)$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{\partial c_1}{\partial s} & \frac{\partial c_1}{\partial t} \\ \frac{\partial c_2}{\partial s} & \frac{\partial c_2}{\partial t} \\ \frac{\partial c_3}{\partial s} & \frac{\partial c_3}{\partial t}\end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

$$= \int_{[0,1]^2} (P\circ c)(s,t)\,(dx\wedge dy)_{c(s,t)}\,(dc_*(s,t))(e_1,e_2) + (Q\circ c)(s,t)\,(dx\wedge dz)(dc_*(s,t)) + (R\circ c)(s,t)\,(dy\wedge dz)(dc_*(s,t))$$

$$= \int_{[0,1]^2} P(c(s,t))\cdot\left(\frac{\partial c_1}{\partial s}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t} - \frac{\partial c_2}{\partial s}\cdot\frac{\partial c_1}{\partial t}\right) + Q(c(s,t))\left(-\frac{\partial c_1}{\partial s}\frac{\partial c_3}{\partial t} + \frac{\partial c_3}{\partial s}\frac{\partial c_1}{\partial t}\right) + R(c(s,t))\left(\frac{\partial c_2}{\partial s}\frac{\partial c_3}{\partial t} - \frac{\partial c_3}{\partial s}\cdot\frac{\partial c_2}{\partial t}\right)$$

$= \int_{[0,1]} \langle (P,Q,R)\circ c, N\rangle$, N normal à cadeia c.

é o fluxo de (P,Q,R) ao longo de c.

Teorema (Stokes): Se $\omega\in\Omega^{k-1}(A)$ e c é k-cadeia em A, então

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c}\omega .$$

Dem.: Faremos com $c=I^k$. Se $\omega\in\Omega^{k-1}[0,1]^k$ então

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} f\,dx_1\wedge\dots\wedge \underset{\text{omitido}}{\widetilde{dx_i}}\wedge\dots\wedge dx_k .$$ Mostremos o resultado para uma dessas parcelas.

Obs: $\displaystyle\int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\,*}_{(j,\alpha)}\left(f\cdot dx_1\wedge\ldots\wedge \widetilde{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_k\right) = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ \displaystyle\int_{[0,1]^k} f(x_1,\ldots,\alpha,\ldots,x_k)\,dx_1\ldots dx_k \end{cases}$

$$f(x_1,\ldots,\alpha,\ldots,x_k)\cdot\left(dx_1\wedge\ldots\wedge\widetilde{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_k\right)(e_1,\ldots,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{posição } i}}{0},1,\ldots)$$

Logo, $\displaystyle\int_{\partial I^k} f\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widetilde{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_k$

$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{\alpha=0}^{1}(-1)^{j+\alpha}\int_{[0,1]^{k-1}} I^{k\,*}_{(i,\alpha)}\left(f\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widetilde{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_j\right)$$

$$=(-1)^{i+1}\int_{[0,1]^k} f(x_1,\ldots,1,\ldots,x_k)\,dx_1\ldots dx_k+(-1)^i\int_{[0,1]^k} f(x_1,\ldots,0,\ldots,x_k)\,dx_1\ldots dx_k$$

e $\displaystyle\int_{I^k} d\left(f\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widetilde{dx_i}\wedge\ldots dx_k\right)=\int_{[0,1]^k}\left(\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\cdot dx_\alpha\right)\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge\widetilde{dx_i}\wedge\ldots\wedge dx_k$

$$=(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_k=(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_1\cdots dx_k$$

$$=(-1)^{i-1}\int_0^1\cdots\left(\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot dx_i\right)\cdot dx_1\ldots\widetilde{dx_i}\ldots dx_k=$$

$$=(-1)^{i-1}\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ldots,1,\ldots x_k)-f(x_1,\ldots,0,\ldots,x_k)\,dx_1\ldots\widetilde{dx_i}\ldots dx_k \quad (k-1) \text{ integrais}$$

$$=(-1)^{i-1}\int_{[0,1]^k} f(x_1,\ldots,1,\ldots,x_k)\,dx_1,\ldots dx_k+(-1)^i\int_{[0,1]^k} f(x_1,\ldots,0,\ldots,x_k)\,dx_1\ldots dx_k$$

$$\Rightarrow \int_{\partial I^k}\omega=\int_{I^k}d\omega.$$

Para um k-cubo singular temos $\boxed{\partial c = c \circ \partial I^k}$

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega \quad e$$

$$\int_c d\omega = \int_{I^k} c^*(d\omega) = \int_{I^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega .$$

Se $c = \sum a_i c_i$ é k-cadeia então

$$\int_c d\omega = \sum a_i \int_{c_i} d\omega = \sum a_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega . \quad \#$$