Variedades em $\mathbb{R}^n$:

Def.: Seja $k>0$. Suponha que $M \subset \mathbb{R}^n$ tem a seguinte ppdd: para cada $p \in M$ existe $V \ni p$, aberto em M, U aberto em $\mathbb{R}^k$ e uma função $\alpha : U \to V$ tal que

(i) α é homeo

(ii) α é de classe C^r

(iii) $D\alpha(x)$ tem posto k, $\forall x \in U$.

M é uma k-variedade sem bordo em $\mathbb{R}^n$, de classe C^r.

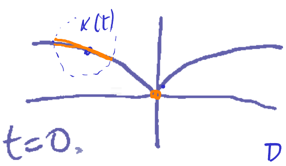
α é um sistema de coordenadas em torno de p.

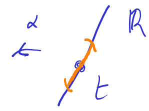
$D\beta = (1, \frac{2}{3}t^{-1/3})$

$\beta(t) = (t, t^{2/3})$ ← $f(t)$.

Exemplos: 1) $k=1$. posto$(D\alpha) = 1 \Rightarrow D\alpha \neq 0 \Rightarrow M$ não tem bicos.

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3, t^2)$, $M = \mathrm{Im}(\alpha)$.





α é C^∞, α^{-1} é contínua mas $D\alpha = 0$ em $t=0$.

$D\alpha_t = (3t^2, 2t)$

$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\beta(t) = (t^3, |t^3|)$, $N = \mathrm{Im}(\beta)$ tem bico na origem

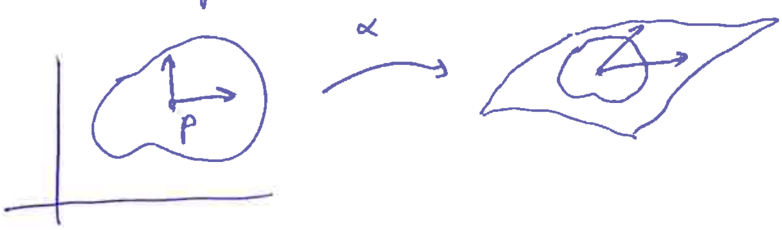
β é C^2, β^{-1} é contínua $D\beta(0) = ?$

2) $k=2$. posto$(D\alpha(p)) = 2 \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(p)$ e $\frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(p)$ são l.i.

$D\alpha_p : \mathbb{R}^2_p \to \mathbb{R}^n_{\alpha(p)}$

$(p,v) \longmapsto (\alpha(p), D\alpha_p(v))$

$\partial \alpha / \partial x_j$ é velocidade da curva coordenada $\gamma(t) = f(p + te_j)$, tangente à superfície M $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(p)\right]$ gera o 2-plano tangente a M em p.



$$D\alpha = \begin{bmatrix} 3x^2+y^2 & 2xy \\ 2xy & 3y^2+x^2 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}$$

$\alpha(x,y) = (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), x^2+y^2)$, α é C^∞, α^{-1} é contínua

$D\alpha(0,0)$ não tem posto 1

③ α^{-1} contínua:

$$\alpha(t) = (\sin 2t).(|\cos t|, \sin t) \quad , \quad 0 < t < \pi$$

α é C^1, $D\alpha$ tem posto 1 e α é injetora

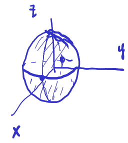
α^{-1} não é contínua.

(0,0,1) $\quad$ $(0,0,1) + t(x, y, z-1)$

②.

$\alpha \circ \beta^{-1}$, $\beta \circ \alpha^{-1}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ não difeos.

④ $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é 2-vdd de classe C^∞



$f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

$f_2(x,y) = -f_1(x,y)$

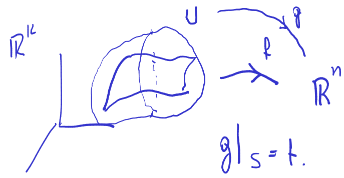
$g_1(x,z) = \sqrt{1-x^2-z^2}$

$g_2(x,z) = -g_1(x,z)$

$h_1(y,z) = \sqrt{1-y^2-z^2}$

$h_2(y,z) = -h_1(y,z)$.

Def.: $S \subset \mathbb{R}^k$, $f: S \to \mathbb{R}^n$. f é difvel (C^r) em S se pode ser extendida para $g: U \to \mathbb{R}^n$, C^r, $S \subset U$, U aberto de $\mathbb{R}^k$.



Nesse contexto, composta de C^r's é C^r:

$f_1: S \to \mathbb{R}^n$, C^r com $f(S) \subset T \subset \mathbb{R}^n$

$f_2: T \to \mathbb{R}^p$, C^r

Então $f_2 \circ f_1: S \to \mathbb{R}^p$ é C^r pois $g_1: U \to \mathbb{R}^n$ extensão de f_1 e $g_2: V \to \mathbb{R}^p$ extensão de f_2 $\Rightarrow$ $g_2 \circ g_1$: $g_1^{-1}(V) \to \mathbb{R}^p$ é extensão C^r de $f_2 \circ f_1$.

Lema: $S \subset \mathbb{R}^k$, $f: S \to \mathbb{R}^n$. Se para cada $x \in S$ existe $U_x \ni x$ e $g_x: U_x \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r tal que $g(p) = f(p)$, $\forall p \in U_x \cap S$ então $f \in C^r$ em S.

Dem.: Sejam U_x cobertura de S. $A = \bigcup_{x \in S} U_x$

seja $\{\varphi_i\}$ p.u. de A subordinada à cobertura $\{U_x\}$.

Para cada i escolha um U_x tq $\operatorname{supp} \varphi_i \subset U_x$ e

seja g_i a função $g_x : U_x \to \mathbb{R}^n$

Então $\varphi_i g_i : U_x \to \mathbb{R}^n$ é tal que $\operatorname{supp} \varphi_i g_i \subset U_x$ e

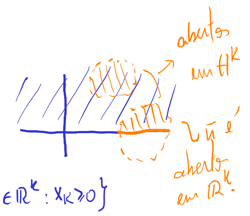
definimos $h_i : A \to \mathbb{R}^n$ extendendo $\varphi_i g_i$ para 0 fora de U_x.

Definindo $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x)$ temos que a soma é finita em cada x

$\Rightarrow g$ é C^r numa vizinhança de cada $x \in A$. $\Rightarrow g \in C^r(A)$.

Além disso, se $x \in S$ então $h_i(x) = \varphi_i g_i(x) = \varphi_i(x) f(x)$

$$\Rightarrow g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) f(x) = f(x).$$



$H^k = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k : x_k \geq 0\}$

$H^k_+ = \{\dots : x_k > 0\}$

Definição: H^k semi espaço superior de $\mathbb{R}^k$ e H^k_+ o aberto.

Lema: U aberto em H^k mas não em $\mathbb{R}^k$ e $\alpha : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^r

Seja $\beta : U' \to \mathbb{R}^n$ extensão de α a um aberto U' de $\mathbb{R}^k$.

Então para $x \in U$, $D\beta(x)$ depende só de α e é independente da extensão β.

Dem.: $\dfrac{\partial \beta_i}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \dfrac{\beta_i(x + he_j) - \beta_i(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \dots$

se $x \in H^k \Rightarrow x + he_j \in H^k$, se $h > 0 \Rightarrow \beta(x + he_j) = \alpha(x + he_j)$

$\Rightarrow D\beta$ depende só de α.

Definição: $k > 0$. Uma k-variedade em $\mathbb{R}^n$ de classe C^r é um subespaço M de $\mathbb{R}^n$ com a propriedade:

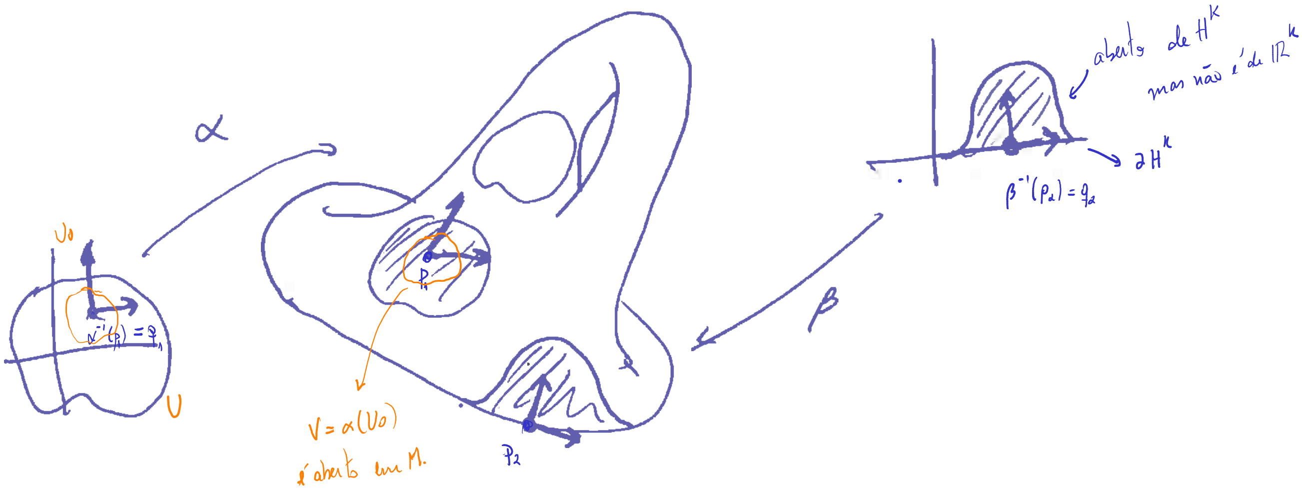
para cada $p \in M$ existe aberto V de M, $p \in V$, U aberto em $\mathbb{R}^k$ ou H^k e $\alpha: U \to V$ tais que

(i) α é homeo

(ii) α é C^r

(iii) $D\alpha(x)$ tem posto k, $\forall x \in U$.

Obs.: $k = 0 \Rightarrow M$ é conjunto discreto em $\mathbb{R}^n$.



Lema: M k-vdd em $\mathbb{R}^n$, $\alpha: U \to V$ sistema de coordenadas

Se U_0 é aberto em $U \Rightarrow \alpha|_{U_0}$ é sist. de coord. em M.

Dem.: U_0 aberto e α^{-1} cont. $\Rightarrow V_0 = \alpha(U_0)$ é aberto em V

U_0 é aberto de $\mathbb{R}^k$ ou H^k, e V_0 é aberto em M

$\alpha_0 = \alpha|_{U_0}$, $\alpha_0: U_0 \to V_0$ é homeo, C^r, e $D\alpha_0(x)$ tem posto k $\forall x \in U_0$.