

Variedades em $\mathbb{R}^n$:

①

Def.: Seja $k > 0$. Suponha que $M \subset \mathbb{R}^n$ tem a seguinte ppdd:
para cada $p \in M$ existe $V \ni p$, aberto em M , U aberto em $\mathbb{R}^k$ e
uma função $\alpha: U \rightarrow V$ tal que

(i) α é homeo

(ii) α é de classe C^r

(iii) $D\alpha(x)$ tem posto k , $\forall x \in U$.

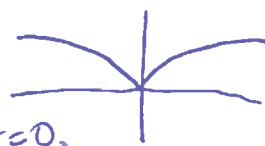
M é uma k -variedade sem bordo em $\mathbb{R}^n$, de classe C^r .

α é uma parametrização de coordenadas em torno de p .

Exemplos: 1) $k=1$. posto $(D\alpha) = 1 \Rightarrow D\alpha \neq 0 \Rightarrow M$ não tem bico.

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (t^3, t^2), M = \text{Im}(\alpha).$$

α é C^∞ , α^{-1} é contínua mas $D\alpha = 0$ em $t=0$.

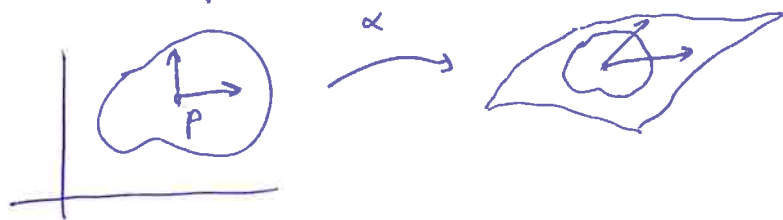


$\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \beta(t) = (t^3, |t^3|)$, $N = \text{Im}(\beta)$ tem bico na origem
 β é C^2 , β^{-1} é contínua $D\beta(0) = ?$

2) $k=2$. posto $(D\alpha) = 2 \Rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(p) \text{ e } \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(p)$ são l.i.

$\frac{\partial \alpha}{\partial x_j}$ é velocidade da curva coordenada $\gamma(t) = \alpha(p + te_j)$,

tangente à superfície M $\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial x_2}(p) \right]$ gera o 2-plano tangente
a M em p .



$\alpha(x,y) = (x(x^2+y^2), y(x^2+y^2), x^2+y^2)$, α é C^∞ , α^{-1} é contínua

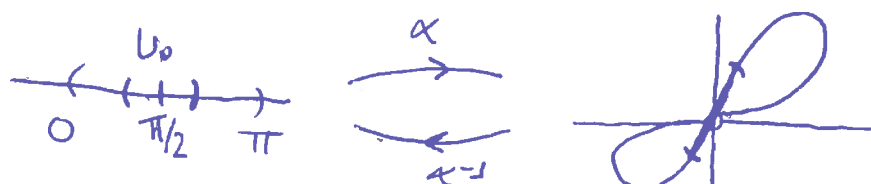
$D\alpha(0,0)$ não tem posto 2



③ α^{-1} contínua:

②.

$$\alpha(t) = (\sin 2t) \cdot (1, \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t < \pi$$



$\alpha \in C^1$, Da ter posto 1 e α é injetora
 α^{-1} não é contínua.

Def.: $S \subset \mathbb{R}^k$, $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$. f é difeol (C^r) em S se pode ser estendida para $g: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^r , $S \subset U$, U aberto de $\mathbb{R}^k$.

Neste contexto, com posto de C^r 's é C^r :

$$f_1: S \rightarrow \mathbb{R}^n, C^r \text{ com } f(S) \subset T \subset \mathbb{R}^n$$

$$f_2: T \rightarrow \mathbb{R}^p, C^r$$

Então $f_2 \circ f_1: S \rightarrow \mathbb{R}^p$ é C^r pois $g_1: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ extensão de f_1
 e $g_2: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ extensão de $f_2 \Rightarrow g_2 \circ g_1: g_1^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^p$ é extensão
 C^r de $f_2 \circ f_1$.

Lema: $S \subset \mathbb{R}^k$, $f: S \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se para cada $x \in S$ existe $U_x \ni x$

e $g_x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ de domo C^r tal que $g_x(p) = f(p)$, $\forall p \in U_x \cap S$
 então $f \in C^r$ em S .

(3)

Dem.: Sejam U_α cobertura de S . $A = \bigcup_{x \in S} U_x$

Seja $\{\varphi_i\}$ p.v. ^{de A} subordinada à cobertura $\{U_x\}$.

Para cada i escolha um U_x tq $\text{supp } \varphi_i \subset U_x$ e

seja g_i a função $g_x: U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$

Então $\varphi_i g_i: U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ é tal que $\text{supp } \varphi_i g_i \subset U_x$ e

de funções $h_i: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ ~~que~~ ~~se~~ ~~estendem~~ $\varphi_i g_i$ para 0 fora de U_x .

Definindo $g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(x)$ temos que a soma é finita em cada x

$\Rightarrow g$ é C^r numa vizinhança de cada $x \in A$. $\Rightarrow g \in C^r(A)$.

Além disso, se $x \in S$ então $h_i(x) = \varphi_i(x) g_i(x) = \varphi_i(x) f(x)$

$$\Rightarrow g(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) f(x) = f(x).$$

Definição: H^k semi espaço superior de $\mathbb{R}^k$ e H_+^k o aberto.

Lema: U aberto em H^k mas não em $\mathbb{R}^k$ e $\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^r

Seja $\beta: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ extensão de α a um aberto U' de $\mathbb{R}^k$.

Então para $x \in U$, $D\beta(x)$ depende só de α e é independente da extensão β .

$$\text{Dem.: } \frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\beta_i(x + h e_j) - \beta_i(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \dots$$

$$\text{se } x \in H^k \Rightarrow x + h e_j \in H^k, \text{ se } h > 0 \Rightarrow \beta(x + h e_j) = \alpha(x + h e_j)$$

$$\Rightarrow D\beta \text{ depende só de } \alpha.$$



(4)

Definição: $k > 0$. Uma k -variedade em $\mathbb{R}^n$ de classe C^r é um subespaço M de $\mathbb{R}^n$ com a propriedade: para cada $p \in M$ existe aberto V de M , $p \in V$, U aberto em $\mathbb{R}^k$ ou H^k e $\alpha: U \rightarrow V$ tais que

(i) α é homeo

(ii) α é C^r

(iii) $D\alpha(x)$ tem posto r , $\forall x \in U$.

Obs.: $k=0 \Rightarrow M$ é conjunto discreto em $\mathbb{R}^n$.



Lema: M k -vdd em $\mathbb{R}^n$, $\alpha: U \rightarrow V$ sistema de coordenadas

Se U_0 é aberto em $U \Rightarrow \alpha|_{U_0}$ é sist. de coord. em M .

Dem.: U_0 aberto e α^{-1} cont. $\Rightarrow V_0 = \alpha(U_0)$ é aberto em V

U_0 é aberto de $\mathbb{R}^k$ ou H^k e V_0 é aberto em M

$\alpha_0 = \alpha|_{U_0}$, $\alpha_0: U_0 \rightarrow V_0$ é homeo, C^r , e $D\alpha_0(x)$ tem posto k
 $\forall x \in U_0$.