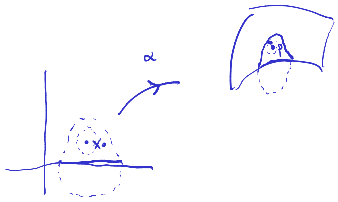
# O bordo de uma variedade:

**Teorema:** $M$ $k$-variedade de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^r$. Se $\alpha_0: U_0 \to V_0$ e $\alpha_1: U_1 \to V_1$ são sistemas de coordenadas em $M$ e $W = V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ então

$$\alpha_1^{-1}\circ\alpha_0 : \underset{\alpha_0^{-1}(W)}{\overset{}{\underset{\parallel}{W_0}}} \to \underset{\alpha_1^{-1}(W)}{\underset{\parallel}{W_1}} \text{ é } C^r \text{ com diferencial não-singular}$$


Dem.: Mostremos que se $\alpha: U \to V$ é sist. coords. então $\alpha^{-1}: V \to \mathbb{R}^k$ é $C^r$. Isto basta pois se $\alpha_0$ e $\alpha_1^{-1}$ são $C^r$ então $\alpha_1^{-1}\circ\alpha_0$ o é e analogamente $\alpha_0^{-1}\circ\alpha_1$ é $C^r$ logo $\alpha_0^{-1}\circ\alpha_1\circ\alpha_1^{-1}\circ\alpha_0 = id$ é $C^r \Rightarrow$ $\alpha_0^{-1}\circ\alpha_1$ e $\alpha_1^{-1}\circ\alpha_0$ tem diferencial não singular.

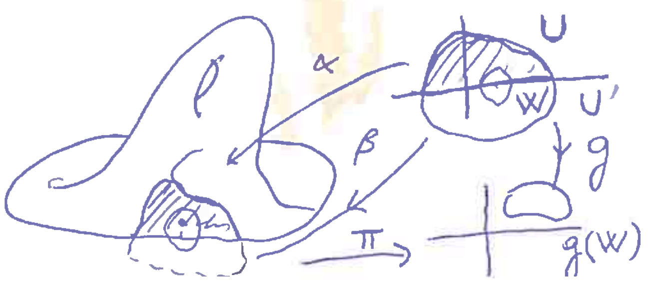
Vejamos que $\alpha^{-1}$ é localmente $C^r$:

Seja $p_0 \in V$ e $x_0 := \alpha^{-1}(p_0)$ e suponha que $U$ é aberto de $H^k$ mas não de $\mathbb{R}^k$.

$\alpha: U \to V$ extende-se a $\beta: U' \to \mathbb{R}^n$, $U'$ aberto de $\mathbb{R}^k$, $U \subset U'$.

$D\alpha(x_0)$ tem posto $k \Rightarrow$ existem $k$ linhas l.i. na matriz de $D\alpha(x_0)$, suponha que sejam as $k$-primeiras e seja $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ a projeção nas $k$-primeiras coordenadas então $g := \pi\circ\beta : U' \to \mathbb{R}^k$ tem $Dg(x_0)$ não singular

$\Rightarrow g$ tem inversa difvel num aberto $W$ contendo $x_0$.



Mostremos que $h: g^{-1} \circ \pi$ é extensão $C^r$ de $\alpha^{-1}$ numa vizinhança de $p_0$: ⑥

$U_0 = W \cap U$ é aberto em $U \Rightarrow V_0 = \alpha(U_0)$ é aberto em $V$

$\Rightarrow V_0 = A \cap V$ para algum aberto $A \subset \mathbb{R}^n$.

$A$ pode ser escolhido no domínio de $h$ (intercepte com $\pi^{-1}(g(W))$).

$h: A \to \mathbb{R}^k$ é $C^r$ e se $p \in A \cap V = V_0$ e $x = \alpha^{-1}(p)$ então

$$h(p) = h(\alpha(x)) = g^{-1}(\pi(\alpha(x))) = g^{-1} \circ g(x) = x = \alpha^{-1}(p)$$

$\Rightarrow h$ é extensão de $\alpha^{-1}$.

Se $U$ for aberto de $\mathbb{R}^k$ repita o argumento acima com $U' = U$ e $\beta = \alpha$.

__Definição__: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ $k$-vdd. e $p \in M$.

$p$ é ponto interior de $M$ se existe $\alpha: U \to V$, $p \in V$ com $U$ aberto em $\mathbb{R}^k$.

$p$ é ponto do bordo de $M$ em caso contrário.

$\partial M = \{p \in M : p$ é ponto do bordo de $M\}$ é o bordo de $M$.

$M - \partial M$ é o interior de $M$.

__Lema__: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ $k$-vdd e $\alpha: U \to V$ sist. de coords. em torno de $p \in M$.

(a) se $U$ é aberto de $\mathbb{R}^k$ então $p$ é interior

(b) se $U$ é aberto de $H^k$ e $p = \alpha(x_0)$ com $x_0 \in H^k_+$ então $p$ é interior.

(c) se $U$ é " de $H^k$ e $p = \alpha(x_0)$ com $x_0 \in \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$ então $p$ é do bordo.

Dem: (a) ☺

(b) Se $\alpha: U \to V$ é como em (b) sejam $U_0 = U \cap H^k_+$ (é aberto de $\mathbb{R}^k$) e $V_0 = \alpha(U_0)$

$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha|_{U_0}$ é sist. de coords. em torno de $p$ com $U_0$ aberto de $\mathbb{R}^k$.

(c) $\alpha_0 : U_0 \to V_0$ sist. coords. em torno de $p$. com $U_0$ aberto de $H^k$ (7)

e $p = \alpha_0(x_0)$ com $x_0 \in \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$.

Suponha que $\alpha_1 : U_1 \to V_1$ é sist. de coords em torno de $p$

com $U_1$ aberto de $\mathbb{R}^k$.

Seja $W = V_0 \cap V_1 \subset M$. $W$ é aberto e contém $p$

Sejam $W_0 = \alpha_0^{-1}(W)$ e $W_1 = \alpha_1^{-1}(W)$, &

$W_0$ é aberto de $H^k$ contendo $x_0$ e $W_1$ é aberto de $\mathbb{R}^k$.

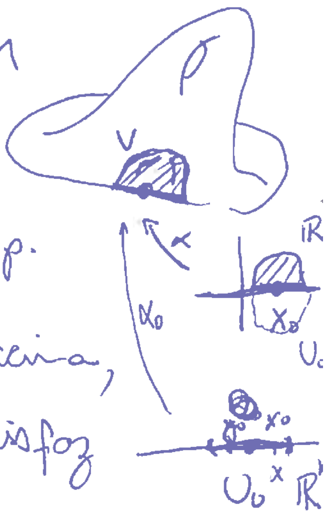
Então $\alpha_0^{-1} \circ \alpha_1 : W_1 \to W_0$ é bijetora e de classe $C^r$ com diferencial

não singular, donde a imagem de $\alpha_0^{-1} \circ \alpha_1$, $W_0$, é aberto em $\mathbb{R}^k$ ↯.

<u>Exemplo:</u> $H^k$ é $k$-vdd em $\mathbb{R}^n$, de classe $C^\infty$. $\partial H^k = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$.

<u>Teorema:</u> $M$ $k$-vdd de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^r$. Se $\partial M \neq \emptyset$ então $\partial M$

é $k-1$-vdd de $\mathbb{R}^n$ sem bordo de $\mathbb{R}^n$.




Dem.: Sejam $p \in \partial M$ e $\alpha : U \to V$ sist. de coords em torno de $p$.

$U$ é aberto de $H^k$ e $p = \alpha(x_0)$ com $x_0 \in \partial H^k$. Pelo lema acima,

$x \in U \cap H^k_+$ satisfaz $\alpha(x) \in M - \partial M$ e $x \in U \cap \partial H^k$ satisfaz

$\alpha(x) \in \partial M$.

Logo $\alpha|_{U \cap \partial H^k}$ é bijeção de $U \cap \partial H^k$ em $\overset{V_0}{\overset{\parallel}{V \cap \partial M}}$, aberto de $\partial M$.

Seja $U_0$ o aberto de $\mathbb{R}^{k-1}$ tq $U_0 \times \{0\} = U \cap \partial H^k$, se $x \in U_0$

defina $\alpha_0(x) = \alpha(x, 0)$. Então $\alpha_0 : U_0 \to V_0$ é sist. de coords. de $\partial M$

entorno de $p$; pois $\alpha_0$ é restrição de $\alpha \Rightarrow \alpha_0$ é $C^r$

$D\alpha_0(x)$ é dada pelas $k-1$ primeiras colunas de $D\alpha(x,0)$, tendo posto $k-1$.

$\alpha_0^{-1}$ é restrição a $V_0$ de $\alpha^{-1}$ projetada nas $k-1$ primeiras

coordenadas, logo $\alpha_0^{-1}$ é contínua.

**Teorema:** Seja $M$ $k$-variedade em $\mathbb{R}^n$ de classe $C^r$. Se $\partial M \neq \emptyset$ então $\partial M$ é $k-1$-variedade sem bordo em $\mathbb{R}^n$ de classe $C^r$.

**Dem.:** Seja $p \in \partial M$ e $\alpha: U \to V$ sistema de coordenadas em torno de $p$. Então $U$ é aberto em $H^k$ e $p = \alpha(x_0)$ para algum $x_0 \in \partial H^k$.
Pelo lema anterior, se $x \in U \cap H^k_+$ então $\alpha(x)$ é ponto interior de $M$ e se $x \in U \cap \partial H^k$ então $\alpha(x) \in \partial M$. Logo $\alpha|_{U\cap\partial H^k}$ é bijeção sobre $V_0 = V \cap \partial M$, aberto de $\partial M$. Seja $U_0 \subset \mathbb{R}^{k-1}$ aberto tal que $U_0 \times \{0\} = U \cap \partial H^k$ e defina $\alpha_0 : U_0 \to V_0$ por $\alpha_0(x) = \alpha(x,0)$. Então $\alpha_0$ é sistema de coordenadas para $\partial M$ pois $\alpha_0$ é de classe $C^r$, pois $\alpha$ o é; $D\alpha_0(x)$ tem posto $k-1$, pois contém as $k-1$ primeiras colunas de $D\alpha(x,0)$ e $\alpha_0^{-1}$ é contínua pois é restrição a $V_0$ de $\alpha^{-1}$, seguida da projeção nas $k-1$ primeiras coordenadas.


**Teorema:** Seja $A$ aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f: A \to \mathbb{R}$ de classe $C^r$. Seja $M = f^{-1}(0)$ e $N = f^{-1}(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$. Se $M$ é não vazio e $Df(x)$ tem posto 1 para todo $x \in M$ então $N$ é $n$-variedade em $\mathbb{R}^n$ e $\partial N = M$.

**Dem.:** Seja $p \in N$ tal que $f(p) > 0$.
Seja $U$ o aberto tal que $x \in U \Leftrightarrow f(x) > 0$ e $\alpha : U \to U$ a identidade. Então $\alpha$ é um sistema de coordenadas em torno de $p$.
Suponha agora $f(p) = 0$. Como $Df(x)$ tem posto 1 então alguma $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \neq 0$, digamos $i = n$. Definindo $F: A \to \mathbb{R}^n$ por $F(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x))$ temos

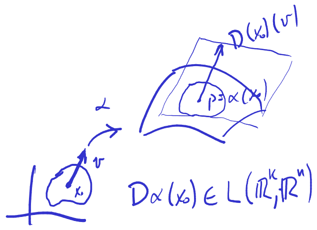
$$DF = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ ? & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Rightarrow \det DF = \frac{\partial f}{\partial x_n} \neq 0.$$

Logo $F$ é difeomorfismo de uma vizinhança de $p \in A$ em $B \ni f(p) \subset \mathbb{R}^n$.
Além disso, $F(A \cap N) = B \cap H^n$ e $F(A \cap M) = B \cap \partial H^n \Rightarrow F^{-1}: B \cap H^n \to A \cap N$ é sistema de coords em $N$.
$(x \in N \Leftrightarrow f(x) \geq 0)$ $(x \in M \Leftrightarrow f(x) = 0)$

**Exemplo:** $B^n(a)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|<a\}$ é n-variedade $C^\infty$ com $\partial B^n = S^{n-1}(a)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x|=a\}$ (2)

Tome $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=a-|x|^2$ ; $Df(x)=[-2x_1 \ \dots \ -2x_n]$.

**Teorema:** Sejam $M\subset\mathbb{R}^n$ uma k-variedade de classe $C^r$ e $f: U\to\mathbb{R}^n$ de classe $C^k$ no aberto $U\subset\mathbb{R}^m$. Se $f(U)\subset V$, onde $V$ é aberto de $M$ coberto por $\alpha: U_0\to V$, então $\alpha^{-1}\circ f: U\to\mathbb{R}^k$ é de classe $C^r$. ⌋ X




$D\alpha(x_0)\in L(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^n)$

**O espaço tangente:** Seja $M\subset\mathbb{R}^n$ k-variedade de classe $C^k$.

Para cada $p\in M$, o espaço vetorial tangente a $M$ em $p$ é o subespaço vetorial $T_pM\subset\mathbb{R}^n$ dado pelo um sistema de coordenadas local em torno de $p$, isto é, se $\alpha: U\to V$ é sist. de coords. em torno de $p\in M$ com $\alpha(x_0)=p$

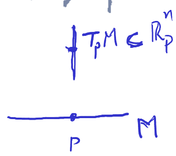
$$T_pM = D\alpha(x_0)(\mathbb{R}^k).$$

$D\alpha(x_0):\mathbb{R}^k_{x_0}\longrightarrow\mathbb{R}^n_p$

$v_{x_0}=(x_0,v)\longrightarrow(p,D\alpha(x_0)(v))$

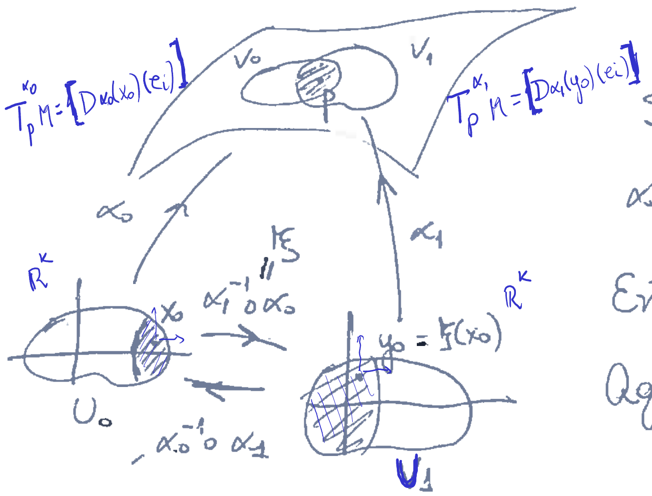
$\dim \operatorname{Im} D\alpha(x_0)=k$

$TM=\dot{\bigcup}_{p\in M} T_pM$




**Teorema:** Sejam $\alpha_0: U_0\to V_0$ e $\alpha_1: U_1\to V_1$ sistemas de coordenadas de uma k-variedade $M\subset\mathbb{R}^n$, de classe $C^r$, com $V_0\cap V_1\neq\emptyset$. Se $p\in V_0\cap V_1$, então $T_pM$ independe do sistema de coordenadas utilizado.

**Dem.:**




Seja $W=V_0\cap V_1$.

Sabemos que

$\alpha_1^{-1}\circ\alpha_0: \alpha_0^{-1}(W)\to\alpha_1^{-1}(W)$ é difeomorfismo

Então $\left\{\frac{\partial\alpha_1}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial\alpha_1}{\partial y_k}\right\}$ é base para $T_pM$

Agora mostremos que cada $\frac{\partial\alpha_0}{\partial x_j}\in\operatorname{span}\left\{\frac{\partial\alpha_1}{\partial y_i}\right\}$

Se $p\in W$ então $p=\alpha_0(x_0)$ e $p=\alpha_1(y_0)$, onde $y_0=\alpha_1^{-1}\circ\alpha_0(x_0)=\xi(x_0)$

$$\alpha_0(x)=(\alpha_1\circ\xi)(x)\Rightarrow \frac{\partial\alpha_0}{\partial x_j}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\alpha_1}{\partial y_i}(\xi(x))\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}(x).$$ #

Em particular a Matriz de mudança de base entre as bases $\left\{\frac{\partial\alpha_0}{\partial x_i}\right\}$ e $\left\{\frac{\partial\alpha_1}{\partial x_j}\right\}$ é a Jacobiana de $\xi=\alpha_1^{-1}\circ\alpha_0$ e $\dim T_pM=k$, $\forall p\in M$.