Exemplo: $B^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le a\}$ é n-variedade $C^\infty$ com $\partial B^n = S^{n-1}(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = a\}$ 2

Tome $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a - |x|^2$ ; $Df(x) = [-2x_1 \ \dots \ -2x_n]$.

**Teorema:** Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ uma k-variedade de classe $C^r$ e $f: U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^k$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $f(U) \subset V$, onde $V$ é aberto de $M$ coberto por $\alpha: U_0 \to V$, então $\alpha^{-1} \circ f: U \to \mathbb{R}^k$ é de classe $C^r$. ⌋ X

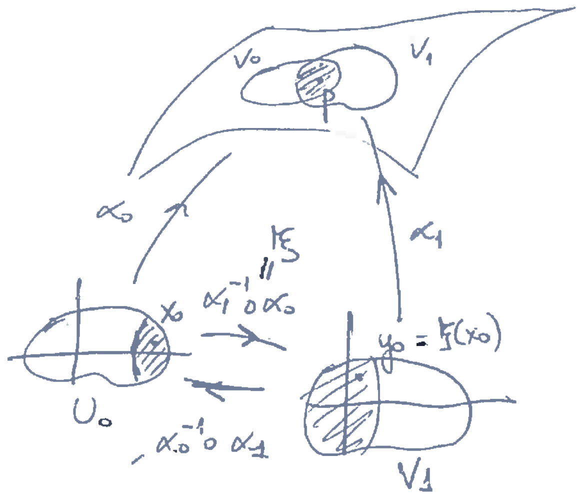
**O espaço tangente:** Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ k-variedade de classe $C^k$.

Para cada $p \in M$, o espaço vetorial tangente a $M$ em $p$ é o subespaço vetorial $T_pM \subset \mathbb{R}^n$ dado pelo um sistema de coordenadas local em torno de $p$, isto é, se $\alpha: U \to V$ é sist. de coords. em torno de $p \in M$ com $\alpha(x_0) = p$

$$T_pM = D\alpha(x_0)(\mathbb{R}^k).$$

**Teorema:** Sejam $\alpha_0: U_0 \to V_0$ e $\alpha_1: U_1 \to V_1$ sistemas de coordenadas de uma k-variedade $M \subset \mathbb{R}^n$, de classe $C^r$, com $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$.
Se $p \in V_0 \cap V_1$, então $T_pM$ independe do sistema de coordenadas utilizado.

**Dem.:**




Seja $W = V_0 \cap V_1$.

Sabemos que

$\alpha_1^{-1} \circ \alpha_0 : \alpha_0^{-1}(W) \to \alpha_1^{-1}(W)$ é difeomorfismo

Então $\left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_k} \right\}$ é base para $T_pM$

Agora mostremos que cada $\frac{\partial \alpha_0}{\partial x_j} \in \text{span}\left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_i} \right\}$

Se $p \in W$ então $p = \alpha_0(x_0)$ e $p = \alpha_1(y_0)$, onde $y_0 = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0(x_0) = \xi(x_0)$

$$\alpha_0(x) = (\alpha_1 \circ \xi)(x) \Rightarrow \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_i}(\xi(x)) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}(x).$$ #

Em particular a Matriz de mudança de base entre as bases $\left\{ \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_i} \right\}$ e $\left\{ \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_j} \right\}$ é a Jacobiana de $\xi = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_0$ e $\dim T_pM = k$, $\forall p \in M$.

**Teorema:** Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma $k$-variedade de classe $C^r$ e $p \in M$.

Então $T_pM = \{ v \in \mathbb{R}^n : v = \gamma'(0)$ para toda $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\gamma(0) = p \}$

**Dem.:** Seja $\alpha : U \to V$ sistema de coordenadas para $M$ em torno de $p$.

Se $v \in T_pM \Rightarrow v = D\alpha(x_0)(\omega)$,

onde $\omega \in \mathbb{R}^k$. Logo

$$v = D\alpha(x_0)(\omega) = \frac{\partial \alpha}{\partial \omega}(x_0) = \frac{d}{dt}\alpha(x_0 + t\omega)\Big|_{t=0}$$

Reciprocamente: Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é curva com $\gamma(0) = p$ então tomando $\delta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^k$ dada por $\delta(t) = (\alpha^{-1} \circ \gamma)(t)$ temos $\delta$ diferenciável em $t = 0$ e $\delta(0) = x_0$. Como $\alpha \circ \delta = \gamma$ temos $\gamma'(0) = D\alpha(x_0).\delta'(t_0) \Rightarrow \gamma'(0) \in T_pM$.

**Exemplos:** 1) Se $M \subset \mathbb{R}^n$ e $N \subset \mathbb{R}^m$ são variedades ($k_1$- e $k_2$) de classe $C^r$ então $M \times N \subset \mathbb{R}^{n+m}$ é $k_1+k_2$-variedade e $T_{(p,q)} M \times N \cong T_pM \oplus T_qN$.

$\alpha : U_0 \to V_0$ sist de coords p/ $M$
$\beta : U_1 \to V_1$ " " " p/ $N$

tome; $\alpha \times \beta : U_0 \times U_1 \to V_0 \times V_1$

$$(\alpha \times \beta)(x,y) = (\alpha(x), \beta(y)).$$

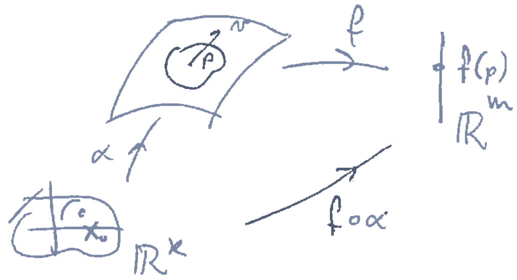
Em particular $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ é 1-variedade $\Rightarrow S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ é 2-variedade (toro) de classe $C^\infty$.

2) Se $M \subset \mathbb{R}^{m+n}$ é gráfico de $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto então

$$T_{(a,f(a))} M = \{ (v, Df(a)(v)) : v \in \mathbb{R}^m \}.$$

De fato, $\alpha : U \to M$, $\alpha(x) = (x, f(x))$ é sist de coords local e $D\alpha(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é dada por $D\alpha(a)(v) = (v, Df(a)(v))$.

**Definição:** $M \subset \mathbb{R}^n$, k-variedade de classe $C^r$ e $f: M \to \mathbb{R}^m$ é difer.vel em $p \in M$ se existe $\alpha: U \subset \mathbb{R}^k \to V$, $p \in V$, sistema de coordenadas tal que $f \circ \alpha: U \to \mathbb{R}^m$ é difer.vel em $x_0 = \alpha^{-1}(p)$.




Obs.: Essa definição equivale à anterior.

A diferencial de $f: M^k \to \mathbb{R}^m$ é a transf. linear $Df(p): T_pM \to \mathbb{R}^m$ dada por $Df(p)(v) = D(f\circ\alpha)(a)(w)$, $a = \alpha^{-1}(p)$, onde $\alpha: U \to V$ é sist. de coords em torno de p e $v = D\alpha(x_0)(w)$.

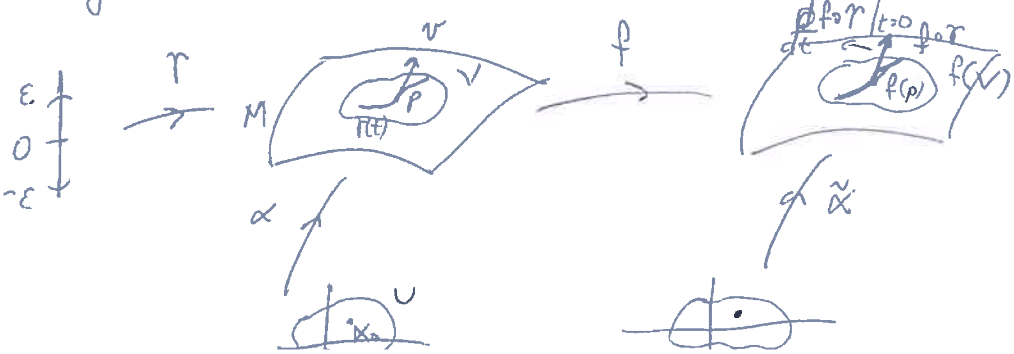
Está bem definida: Se $\beta: U' \to V'$ é outro sist. de coordenadas com $\beta(y_0) = p$ e $v = D\beta(y_0)(w')$ então, como $\beta = \alpha \circ \xi$, onde $\xi = \alpha^{-1}\circ\beta$ é difeo,

$D(\alpha^{-1}\circ\beta)\cdot w' = w.$

temos
$$D(f\circ\beta)(y_0)\cdot w' = D(f\circ\alpha\circ\xi)(y_0)\,w' = D(f\circ\alpha)(x_0)\cdot D\xi(y_0)\cdot w' = D(f\circ\alpha)(x_0)\,w.$$

Obs.: Como $v \in T_pM$ é tal que $v = \gamma'(0)$, para $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ então $Df(p)(v) = Df(p)(\gamma'(0)) = \dfrac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0)$ é tangente à curva $f\circ\gamma: (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathbb{R}^m$.

Obs: Se $f: M \to \mathbb{R}^m$ é de classe $C^r$, $p \in M$ e $f(M) \subset N$, N é variedade de classe $C^r$ em $\mathbb{R}^m$ então $f: M \to N$ é, por definição, diferenciável em p e $Df(p)$ é uma transf. linear de $T_pM$ em $T_{f(p)}N$, já que $Df(p)(v)$ é tangente a uma curva contida em N passando por $f(p)$.



**Definição:** Sejam $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ difvel. $c \in \mathbb{R}^n$ é valor regular de $f$ se para todo $x \in f^{-1}(c)$ $Df(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é sobrejetora. ($\Rightarrow \{\nabla f^1, \dots, \nabla f^n\}$ são l.i.).

**Teorema:** Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $C^r$. Se $c \in \mathbb{R}^{n-k}$ é valor regular de $f$, então $f^{-1}(c)$ é k-variedade de classe $C^r$ e, para todo $p \in f^{-1}(c)$ temos

$$T_p f^{-1}(c) = \operatorname{Ker} Df(p).$$

Exemplo: Falar caso $n=2$ e $k=1$.

**Dem.:** $c$ é valor regular de $f \Rightarrow$ podemos usar Teorema da função implícita na equação $f(x)=c$ e concluir que $n-k$ coordenadas de $x$ são localmente funções $C^r$ das $k$ coordenadas restantes, ou seja, para cada $p \in f^{-1}(c)$ existe aberto $Z \subset \mathbb{R}^n$, $p \in Z$ tal que $Z \cap f^{-1}(c)$ é gráfico de uma função de classe $C^r$ definida num aberto de $\mathbb{R}^k$ com valores em $\mathbb{R}^{n-k}$, logo ~~...~~ $f^{-1}(c) \cap Z$ é k-variedade de $\mathbb{R}^n$ e portanto $f^{-1}(c)$ também.

Para $p \in f^{-1}(c)$ e $v \in T_p f^{-1}(c)$ temos que $v = \gamma'(0)$, onde $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to f^{-1}(c)$ com $\gamma(0) = p$

e portanto $(f \circ \gamma)(t) = c \Rightarrow \frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t) = 0 \overset{t=0}{\Rightarrow} Df(p) \cdot v = 0 \Rightarrow v \in \operatorname{Ker} Df(p)$.

$\Rightarrow T_p f^{-1}(c) \subset \operatorname{Ker} Df(p)$, mas $\dim T_p f^{-1}(c) = \cancel{n}\, k = \dim \operatorname{Ker} Df(p)$. #

**Exemplo:** $X \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal se $X \cdot X^t = Id \Rightarrow X^t \cdot X = Id$

Logo $X^{-1} = X^t$. $X$ tem linhas e colunas ortonormais e leva base o.n. em b.o.n.

Definimos por $O(n) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : X \text{ é ortogonal}\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$.

$O(n)$ é grupo e $\frac{n(n-1)}{2}$ – variedade de classe $C^\infty$.

De fato, seja $f(X) = X \cdot X^t \Rightarrow Df(X)(A) = X \cdot A^t + A X^t$ (é sempre simétrica; derivada direcional) e $O(n) = f^{-1}(Id)$

$f: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$O(n)$ é $C^\infty$ – $n^2 - \frac{n(n+1)}{2}$ vedd

$T_{Id} O(n)$ = matrizes anti-simétricas

$Id$ é valor regular: $XA^t + AX^t = S$ (simétrica), tome $A = \frac{SX}{2}$

Teorema: Toda ~~superfície~~ K-variedade de classe $C^r$ é, localmente, gráfico de uma função de classe $C^r$.

Dem.: $M \subset \mathbb{R}^n$, k-variedade. Mostremos que todo $p \in M$ admite vizinhança $V \ni p$ e sist. coords $\alpha: U \to V$, $U \subset \mathbb{R}^k$ aberto e $\alpha(x_0) = p$, tal que $\alpha(x) = (x, f(x))$ para alguma $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$, de classe $C^r$.

Seja $\beta: U_0 \to V_0$ uma parametrização de uma vizinhança $V_0$ de $p$ com $p = \beta(y_0)$

Assim, $T_pM = D\beta(y_0)(\mathbb{R}^k)$ e podemos decompor $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{n-k}$ tal que a projeção $\pi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é isomorfismo se restrita a $T_pM$.

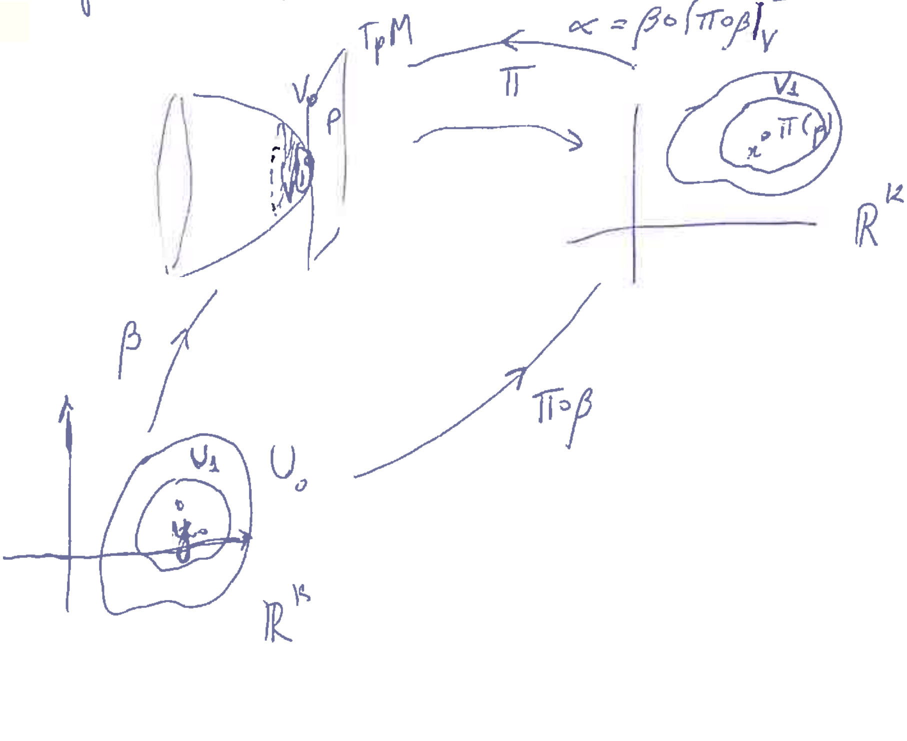
Logo $\pi\circ\beta: U_0 \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ satisfaz $(D\pi\circ\beta)(y_0) = \pi \circ D\beta(y_0): \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ é isom.

e portanto $\pi\circ\beta$ é difeo local de classe $C^r$, donde existe aberto $U_1 \subset U_0$, $y_0 \in U_1$ tal que $\pi\circ\beta|_{U_1}$ é difeomorfismo sobre um aberto $V_1$ de $\mathbb{R}^k$.

Fazendo $V = \beta(U_1)$ temos que $\alpha = \beta\circ(\pi\circ\beta|_{U_1})^{-1}: V_1 \to V$

é sist. de coordenadas $C^r$ e, se $x \in V_1$ então $(\pi\circ\alpha)(x) = x$

$\Rightarrow \alpha(x) = (x, f(x))$, para $f: V_1 \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $C^k$



Corolário: Toda $k$-vdd de $\mathbb{R}^n$ de classe $C^r$ é imagem inversa de valor regular de uma função de classe $C^r$, ao menos localmente.

Dem.: $M \subset \mathbb{R}^n$ é localmente gráfico de $f: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $C^r$ então $f(U) = g^{-1}(0)$, onde $g: V \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$ é dada por

$g(x,y) = y - f(x)$.

Variedades orientáveis:

$A$ : classe dos gráficos de funções $f: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $C^r$.

$B$ : classe das imagens inversas de valores regulares de funções

$g: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe $C^r$

$C$ : classe das $k$-variedades de classe $C^r$ em $\mathbb{R}^n$.

Claramente $A \subset B \subset C$; o corolário mostra que $C \subset A$ "localmente."
e o teorema que $B \subset A$ "localmente".

Em geral $B \not\subset A$ (esfera).
Para mostrar que $C \not\subset B$ precisamos do conceito de orientabilidade.

Def.: Sejam $M$ $k$-variedade de classe $C^r$ e $\alpha: U_0 \to V_0$ e $\beta: U_1 \to V_1$ parametrizações de $M$ com $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$. Então $\alpha$ e $\beta$ são compatíveis se o jacobiano de $(\alpha^{-1} \circ \beta)(x)$ tem determinante positivo para todo $x \in \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ ou seja a matriz mudança de base das bases de $T_pM$ dadas por $\alpha$ e $\beta$ têm det positivo.

Obs.: Se $\beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ é conexo então $\alpha^{-1} \circ \beta : \beta^{-1}(V_0 \cap V_1) \to \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1)$ tem det $J$ com mesmo sinal $\forall x \in \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$, mas em geral $\beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ não é conexo.