

Corolário: Toda k -vdd de $\mathbb{R}^n$ de classe C^r é imagem inversa de valor regular de uma função de classe C^r , ao menos localmente.

(7)

Dem.: $M \subset \mathbb{R}^n$ é localmente gráfico de $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^r então $f(U) = g^{-1}(0)$, onde $g: V \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ é dada por $g(x, y) = y - f(x)$.

Variedades orientáveis:

A = classe dos gráficos de funções $f: U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^r .

B = classe das imagens inversas de valores regulares de funções $g: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^r

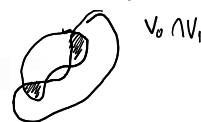
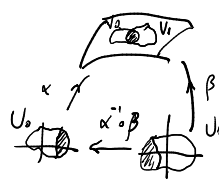
C = classe das k -variedades de classe C^r em $\mathbb{R}^n$.

Claramente $A \subset B \subset C$; o corolário mostra que $C \subset A$ "localmente" e o teorema que $B \subset A$ "localmente".

Em geral $B \not\subset A$ (esfera).

Para mostrar que $C \not\subset B$ precisamos do conceito de orientabilidade.

Def.: Sejam M k -variedade de classe C^r e $\alpha: U_0 \rightarrow V_0$ e $\beta: U_1 \rightarrow V_1$ parametrizações de M com $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$. Então α e β são compatíveis se o jacobiano de $(\alpha^{-1} \circ \beta)(x)$ tem determinante positivo para todo $x \in \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ ou seja a matriz mudança de base das bases de $T_x M$ dadas por α e β tem det positivo.



Obs.: Se $\beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ é conexo então $\alpha^{-1} \circ \beta: \beta^{-1}(V_0 \cap V_1) \rightarrow \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1)$ tem det J com mesmo sinal $\forall x \in \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$, mas em geral $\beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ não é conexo.

Def.: Se M é k -vdd de $\mathbb{R}^n$ então um atlas sobre M é uma coleção $\mathcal{A}$ de parametrizações $\alpha_i: U_i \rightarrow V_i$ de classe C^k tais que $M = \bigcup_{i \in I} V_i$

$\mathcal{A}$ é um atlas compatível se α, β são compatíveis, $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ é um atlas compatível máximo quando não existe atlas compatível $\mathcal{B}$ de classe C^k sobre M tal que $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$.

Obs.: Dado um atlas $\mathcal{A}$ compatível existe um único atlas maximal compatível que o contém.

Def.: M k -vdd em $\mathbb{R}^n$ é orientável se existe ao menos um atlas compatível de classe C^k sobre M .

Fixado tal atlas $\mathcal{A}$ M está orientada por ele e as parametrizações de $\mathcal{A}$ são chamadas positivas.

Exemplos: 1) $M = \alpha(U)$, $\alpha: U \rightarrow V$ de classe C^k é orientável

2) $\forall V \subset M$ aberto, M orientável $\Rightarrow V$ é orientável

$$\alpha|_{\alpha^{-1}(V \cap V_0)}$$



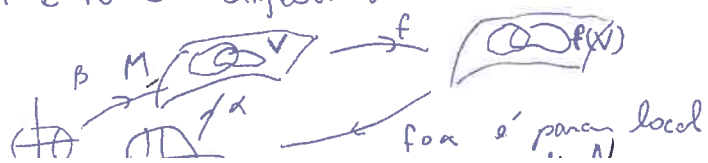
Def.: M, N variedades de classe C^k .

$f: M \rightarrow N$ é difeo de classe C^k e uma bijeção de classe C^k com inversa $f^{-1}: N \rightarrow M$ de classe C^k .

Neste caso $D_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ é iso linear $\Rightarrow M$ tem mesma dimensão

(A recíproca é falsa: se $D_p f$ é iso linear, a f^{-1} é difeo local apenas)
 $\forall p \in M$.

M e N são difeomorfos $\cdot$ M é orientável $\Rightarrow N$ orientável



$$(f \circ \alpha)^{-1} \circ (f \circ \beta) = \alpha^{-1} \circ \beta \text{ tem Jacobiano } > 0 \text{ pois } M \text{ é orientável} \Rightarrow N \text{ orientável}$$

Obs: (Revertendo ~~o sinal~~ de uma parametrização)

(9)

M k -vdd em $\mathbb{R}^n$

se $\alpha: U_0 \rightarrow V_0$ é para de M de classe C^k

existe $\tilde{\alpha}: U_1 \rightarrow V_0$ para de M de classe C^k tal que

para toda $\beta: U \rightarrow V_1$ com $V_1 \cap V_0 \neq \emptyset$ temos $\det J(\beta^{-1} \circ \alpha)(x) = -\det J(\beta^{-1} \circ \tilde{\alpha})(\tilde{x})$ para todo $x \in U_0$ e $\tilde{x} \in U_1$ tais

que $\alpha(x) = \tilde{\alpha}(\tilde{x})$. Basta tomar difeo $\tilde{\alpha}: U_0 \rightarrow U_1$ de classe C^k

tal que $\det J\tilde{\alpha} < 0$, por exemplo $\tilde{\alpha}(x_1, \dots, x_k) = (-x_1, \dots, x_k)$ e $U_1 = \tilde{\alpha}(U_0)$

Exemplos: se M admite atlas com duas parametrizações $\alpha: U_0 \rightarrow V_0$ e $\beta: U_1 \rightarrow V_1$ com $V_0 \cap V_1$ conexo então M é orientável.

De fato $\alpha^{-1}(V_0 \cap V_1)$ conexo $\Rightarrow J D(\beta^{-1} \circ \alpha)(x)$ tem sinal constante $\forall x \in \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1)$

se for positivo $\Rightarrow A = \{\alpha, \beta\}$ é atlas compatível.

se for negativo: mudamos o sinal de α e obtemos atlas compatível

Em particular $S^n, n \geq 2$ é orientável:

se $p = e_n$ e $q = -p$ e $V_0 = S^n - \{p\}$ e $V_1 = S^n - \{q\}$

temos $S^n = V_0 \cup V_1$ e $V_0 \cap V_1$ conexo, pois $n \geq 2$.

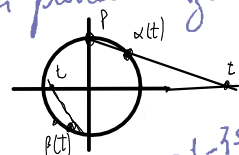
Usando as projeções ortográficas $\alpha: V_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ e sua inversa $\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow V_0$

são de classe C^∞ e $\alpha(\alpha^{-1}(y)) = y, \forall y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow D\alpha^{-1}(y)$ é injetora

$\Rightarrow \alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow V_0$ é parametrização C^∞

Fazendo $\tilde{\beta}: \mathbb{R}^n \rightarrow V_1$ com $\tilde{\beta}(y) = -\alpha^{-1}(y)$ temos outra parametrização

Logo $A = \{\tilde{\beta}, \alpha\}$ é atlas compatível $\Rightarrow S^n$ é orientável



Se $n=1$ então $S^1 - \{p, q\}$ não é conexo mas $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow S^1 - \{p\}$ e $\beta: \mathbb{R} \rightarrow S^1 - \{q\}$ dadas

por $\alpha(t) = \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right)$ e $\beta(t) = \left(\frac{-2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{t^2+1} \right)$ definem S^1 e $\alpha(t) = \beta(-1/t)$

$\Rightarrow \beta^{-1} \circ \alpha: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ e $\beta^{-1} \circ \alpha = -1/t$

$\Rightarrow \det D(\beta^{-1} \circ \alpha) = 1/t^2 > 0$

Teorema: Sejam A atlas coerente máximo de classe B^r sobre uma k -vdd M
 e $\xi: U_0 \rightarrow V$ param. C^k de M tal que $\xi \notin A$. Se V é conexo então
 para toda $\alpha: U_1 \rightarrow W$, $\alpha \in A$, temos $\det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x) < 0$, $\forall x \in \xi^{-1}(V \cap W)$

Dem.: Sejam $A = \{ p = \xi(x) \in V: p = \alpha(y), \alpha: U_1 \rightarrow W \text{ é param. de } M \}$
 com $\det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x) < 0, \alpha \in A$

e $B = \{ p = \xi(x) \in V: p = \beta(y), \beta: U_2 \rightarrow Z \text{ é param. de } M \text{ com } \det D(\beta^{-1} \circ \xi)(x) > 0, \beta \in A \}$

A é atlas $\Rightarrow V = A \cup B$.

Se existe $p \in V$ tq $p = \xi(x) = \alpha(y) \in A \cap B$ temos

$$0 < \det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x) = \det D(\alpha^{-1} \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \xi)(x) \\ = \underbrace{\det D(\beta^{-1} \circ \alpha)(y)}_{> 0} \cdot \underbrace{\det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x)}_{< 0} < 0$$

$V = A \cup B$ é uma cisão de V . Como $A \neq \emptyset$ (V é conexo) temos $B = \emptyset$.

Condição: se M é k -vdd admite atlas coerente de classe B^r então admite atlas de classe B^r .

Dem.: A : atlas C^1 máximo coerente sobre M

$A_k = \{ \alpha: U \rightarrow V \text{ param. de classe } B^k, \forall \alpha \in A \text{ e } V \text{ conexo} \}$

$A_k \subset A \Rightarrow \alpha, \beta \in A_k$ são coerentes.

Se $p \in M$ existe V aberto conexo de M tq $p \in V$ e $\xi: U \rightarrow V$ é param. de classe C^k .

1) $\xi \in A \Rightarrow \xi \in A_k$

2) $\xi \notin A \Rightarrow \det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x) < 0, \forall \alpha: U \rightarrow W \in A \text{ com } V \cap W \neq \emptyset$.

Fazendo $\tilde{\xi}$ a parametr. com sinal invertido de ξ temos $\tilde{\xi} \in A$ de classe B^k
 $\Rightarrow \tilde{\xi} \in A_k$, logo A_k é atlas sobre M .

Seja $\alpha: (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^6$

(12)

$\alpha: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow V_1$ e $\beta: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \rightarrow V_2$ dados por

$\alpha(v, t) = (v, tv)$ e $\beta(v, t) = (tv, v)$ são para. de classe C^∞ e

$\alpha^{-1}(V_1 \cap V_2) = \beta^{-1}(V_1 \cap V_2)$ tem duas componentes conexas: $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times (-\infty, 0)$ e $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times (0, +\infty)$.
 $\alpha^{-1}(v, tv) = (v, 1/t)$

$(\beta^{-1} \circ \alpha)(v, t) = (tv, 1/t) = (tx, ty, tz, 1/t)$ satisfaz

$\det D(\beta^{-1} \circ \alpha)(v, t) = -t$, ~~de~~ que troca de sinal em cada componente conexa. Logo M é 4-vdd de classe C^∞ em $\mathbb{R}^6$ não orientável.

Def.: Seja M k -vdd em $\mathbb{R}^n$. Então $T_p M^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n: \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in T_p M\}$ e o espaço normal a M em p , isto é, $T_p M^\perp = (T_p M)^\perp$.

$\dim T_p M^\perp = n - k$.

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

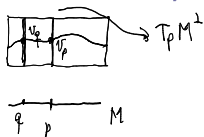
$$f(x) = \langle x, x \rangle - 1$$

Exemplos: $(T_p S^n)^\perp = \{\alpha p: \alpha \in \mathbb{R}\}$

Em geral, se M é imagem inversa de valor regular de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ então $T_p M^\perp = [\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)]$.

Para a esfera temos $f^{-1}(1)$, $f(x) = \langle x, x \rangle$ com $\nabla f(x) = 2x$.
 $Df(p)(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle = 0$
 $\Leftrightarrow v \in (\nabla f(p))^\perp$

Um campo de vetores normal sobre M é um campo de vetores definido em M tal que $v_p \in T_p M^\perp$.



Teorema: Se M é k -vdd de $\mathbb{R}^n$ e admite $n-k$ campos vetoriais normais (l.i.) contínuos e l.i. em cada ponto então M é orientável.

Dem.: Seja $\mathcal{A} = \{ \alpha: U \rightarrow V; \text{ para. de classe } C^1 \text{ com } U \text{ conexo tal que} \}$

$$\Phi = \left[\underbrace{\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}(x)}_{\text{geram } T_{\alpha(x)}M} \underbrace{v_1(x) \dots v_{n-k}(x)}_{\text{geram } T_{\alpha(x)}M^\perp} \right]_{n \times n} \text{ tem } \det > 0 \}$$

Φ é contínua em $x \Rightarrow \det \Phi$ mantém o sinal em U

Se $\det \Phi < 0$ troque o sinal de α

Logo $\mathcal{A}$ é atlas C^1 para M .

Compatibilidade: Sejam $\alpha: U_0 \rightarrow V_0$ e $\beta: U_1 \rightarrow V_1$ parâmetros de $\mathcal{A}$

com $p = \alpha(x) = \beta(y) \in V_0 \cap V_1$.

$$D(\beta^{-1} \circ \alpha)(x) = (a_{ij}) \text{ onde } \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(y)$$

ou seja, $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(y) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}_{n \times n}$ onde $\tilde{\Phi}(y) = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y)$ e $\tilde{\Phi}(y) = \frac{\partial \alpha}{\partial y}(y) \leftarrow \Phi \text{ da } \beta$.

$$\Rightarrow \det \Phi(x) = \det \tilde{\Phi}(y) \cdot \det(a_{ij})$$

$$\Rightarrow \det(a_{ij}) > 0 \Rightarrow \alpha \text{ e } \beta \text{ s\~ao comp. \#}$$

Corolário: Se $M = f^{-1}(c)$ então M é orientável

Isto mostra que as matrizes 2×3 de posto 1 não são imagem inversa de valor regular e $O(n)$ é orientável.

Obs.: Se existem apenas r campos normais contínuos l.i., $r < n-k$, então pode não ser orientável. $M \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \leftarrow \text{tens } e_{n+1}, \dots, e_r$.

se M não for orientável...

Teorema: $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é orientável $\Leftrightarrow$ existe $v: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ contínuo tal que $v(p) \neq 0, \forall p \in M$.

Dem.: ($\Leftarrow$) ok!

($\Rightarrow$) M orientável escolha para cada p um dos vetores unitários normais de modo que para cada $\alpha: U \rightarrow V$ positiva $\alpha(x) = p \in V$ tem

$$\bar{\Phi}(x) = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}(x) \mu(\alpha(x)) \right] \text{ tem } \det \geq 0$$

não depende da parametrização ^{positiva} tomada.

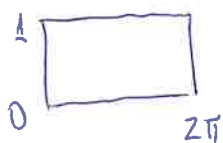
Basta ver que μ é contínua. M é, localmente, imagem inversa de valor regular e portanto coberta por parametrizações que têm $\nabla f(p)/\|\nabla f(p)\|$ como campo unitário normal. Nesse caso $\forall \alpha: U \rightarrow V$ positiva

$$\text{tem } \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} & \nabla f(p)/\|\nabla f(p)\| \end{bmatrix} > 0 \text{ ok fazemos } \mu = \nabla f(p)/\|\nabla f(p)\|$$

ou

$$< 0 \text{ aí fazemos } \mu = -\nabla f(p)/\|\nabla f(p)\|$$

Exemplo: Faixa de Möbius.



$$f: [0, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3: f(s, t) = r(t) + (s - 1/2) \delta(t)$$

$$r(\cos t, \sin t, 0), \delta = \cos(t/2) r(t) + \sin(t/2) e_3.$$

Q

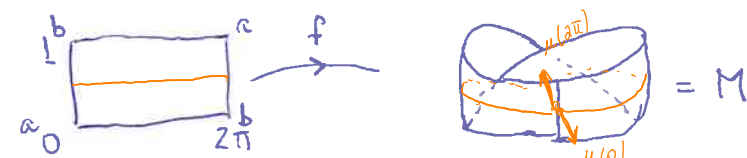
Teorema: $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é orientável $\Leftrightarrow$ existe campo vetores $v: M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, contínuo, (15)
normal a M tal que $v(p) \neq 0, \forall p \in M$.

Dem.: ($\Leftarrow$) ok!

($\Rightarrow$) M orientável: escolha em cada $p \in M$ um vetor unitário normal, $\mu(p)$, tal que para cada $\alpha: U \rightarrow V$ positiva $\alpha(x) = p \in V$ temos

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}(x) & \mu(p) \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{não depende da parametrização positiva tomada})$$

$\mu: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo pois M é localmente imagem inversa de valor regular, donde é coberto por parametrizações que têm $\nabla f / \|\nabla f\|$ como normal unitário basta tomar $\mu = \nabla f / \|\nabla f\|$ ou $\mu = -\nabla f / \|\nabla f\|$.

Exemplo: Faixa de Möbius  $= M$

$f: (0,1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(s,t) = \gamma(t) + (s-1/2)\delta(t)$, com

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ e $\delta(t) = \cos(t/2)\gamma(t) + \sin(t/2) \cdot e_3$

tem como imagem a faixa de Möbius e $f|_{(0,1) \times (a,b)}$, $b-a \leq \pi$ o'

parametrização C^∞ para M .

Em geral, se $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é vdd orientável e $\gamma: [a,b] \rightarrow M$ é curva fechada ~~no plano~~ e μ é campo normal unitário a M ao longo de γ então $\mu(a) = \mu(b)$ pois para qualquer campo normal unitário sobre M

temos $\langle v(\gamma(t)), \mu(t) \rangle = \pm 1 \Rightarrow$ ~~$\langle v(\gamma(t)), \mu(t) \rangle = \pm 1$~~

$$\Rightarrow v(\gamma(t)) = \pm \mu(t)$$

$$\Rightarrow v(\gamma(a)) = \pm \mu(a) \quad \text{e} \quad v(\gamma(b)) = \pm \mu(b)$$

$$\Rightarrow \mu(a) = \mu(b).$$

$\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é caminho fechado na faixa de Möbius e o campo normal $\mu(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ é $\mu(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\frac{1}{2}, t) \times \frac{\partial f}{\partial s}(\frac{1}{2}, t) = \dots$ e $\mu(0) = -\mu(2\pi) \Rightarrow M$ não é orientável

Exemplo: Plano projetivo em $\mathbb{R}^4$.

(16)

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ dada por } f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

$\mathbb{RP}^2 = f(S^2)$ é 2-vdd C^∞ em $\mathbb{R}^4$:

$$\bullet) f(p) = f(q) \Leftrightarrow p = \pm q$$

$\bullet) Df(p): \mathbb{R}_p^3 \rightarrow \mathbb{R}_{f(p)}^4$ é injetiva se restrita a cada $T_p S^2$, $p = (x, y, z)$ pois

$$Df(p) = \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{bmatrix} \text{ tem os menores } \det \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ z & 0 & x \end{bmatrix} = 2x(x^2 + y^2)$$

$$\text{e } \begin{bmatrix} 2x & -2y & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{bmatrix} = 2y(x^2 + y^2).$$

nos nulos se $x, y \neq 0 \Rightarrow Df(p)$ é injetiva em $S^2 - \{(0, 0, \pm 1)\}$

Em $p = (0, 0, \pm 1)$ temos $Df(0, 0, \pm 1)(e_1) = \pm e_3$ e $Df(0, 0, \pm 1)(e_2) = \pm e_4$.

Mas $T_p S^2 = [e_1, e_2]$ e $Df_p(T_p S^2) = [e_3, e_4] \Rightarrow \dim \operatorname{Im} Df_p = 2$
 $\Rightarrow \dim \ker Df_p = 0, \forall p \in S^2$.

$\bullet) \text{ Se } \alpha: U \rightarrow V \text{ é param. de } S^2 \text{ então } f \circ \alpha: U \rightarrow \mathbb{R}^4$
 é imersão e se V não contém pontos antípodos $f \circ \alpha$ é injetiva.

• Nesse caso, $f \circ \alpha$ é homeo de U sobre um aberto W de $\mathbb{RP}^2$,

pois $f|_{S^2}: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ é aberta: se $A \subset S^2$ é aberto mostramos
 que $\mathbb{RP}^2 - f(A)$ é fechado.

$$f^{-1}(\mathbb{RP}^2 - f(A)) = S^2 - f^{-1}(f(A)) = S^2 - \underbrace{(AU - \bar{A})}_{\text{aberto}} \text{ é fechado}$$

$\Rightarrow \mathbb{RP}^2 - f(A)$ é fechado.

Logo $\mathbb{RP}^2$ é 2-vdd em $\mathbb{R}^4$ compacta ($\mathbb{RP}^2 = f(S^2)$) e não orientável
 pois contém um aberto homeomorfo à faixa de Möbius

$f(R)$, $R = \{(x, y, z) \in S^2: y \geq 0 \text{ e } -1/2 \leq z \leq 1/2\}$, $f|_R$ é homeo mas

$f(\partial R)$ cola "invertendo" duas componentes do bordo
 $f(p) = f(-p)$.

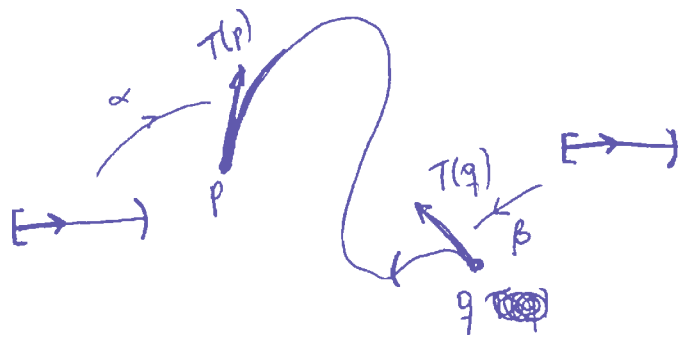


Orientação no bordo de uma variedade

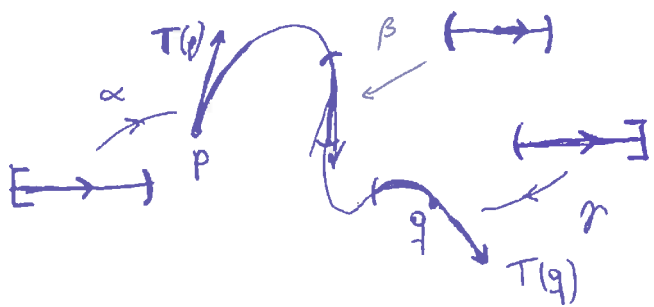
Para 1-variedades a orientação se dá pelo vetor tangente: ~~o vetor~~

Se $p \in M$ e $\alpha: I \rightarrow V$ é param. com $p \in V$ define $T(p) = (p, D\alpha(t_0)/|D\alpha(t_0)|)$
 $\alpha(t_0)$

Se M tem bordo há um problema:



Vamos permitir admitir M por partes
 de $\mathbb{R}$, H^1 e $L^1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
 aí o problema some.



Orientação no bordo de uma variedade:

Teorema: Seja $k > 1$. Se M ~~orientável~~ é k -variedade orientável e com bordo, então ∂M é orientável.

Dem.: Seja $p \in \partial M$ e $\alpha: U \subset \mathbb{H}^k \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ uma param. em torno de p .

Seja ~~o vetor~~ $h: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ dada por $h(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0)$

temos que $\alpha_0: \mathbb{R}^{k-1} \xrightarrow{U \cap \mathbb{H}^{k-1} \cap \partial U} V \subset \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha_0(p) = (\alpha \circ h)_p$ é param. de ∂M em torno de p .

Sejam $\alpha: U_0 \rightarrow V_0$ e $\alpha_1: U_1 \rightarrow V_1$ parametrizações de M compatíveis em torno de p . e $g: \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1) \rightarrow \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ dada por $g(x) = (\beta^{-1} \circ \alpha)(x)$.
 $\det Dg(x) > 0, \forall x \in \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1)$.