Corolário: Toda k-vdd de $\mathbb{R}^n$ de classe C^r é imagem inversa de valor regular de uma função de classe C^r, ao menos localmente.

Dem.: $M \subset \mathbb{R}^n$ é localmente gráfico de $f: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^r então $f(U) = g^{-1}(0)$, onde $g: V \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^{n-k}$ é dada por

$g(x,y) = y - f(x)$.

Variedades orientáveis:

A : classe dos gráficos de funções $f: U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^r.

B : classe das imagens inversas de valores regulares de funções
$g: X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ de classe C^r

C : classe das k-variedades de classe C^r em $\mathbb{R}^n$.

Claramente $A \subset B \subset C$; o corolário mostra que $C \subset A$ "localmente."
e o teorema que $B \subset A$ "localmente".

Em geral $B \not\subset A$ (esfera).
Para mostrar que $C \not\subset B$ precisamos do conceito de orientabilidade.

Def.: Sejam M k-variedade de classe C^r e $\alpha: U_0 \to V_0$ e $\beta: U_1 \to V_1$ parametrizações de M com $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$. Então α e β são compatíveis se o jacobiano de $(\alpha^{-1} \circ \beta)(x)$ tem determinante positivo para todo $x \in \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ ou seja a matriz mudança de base das bases de T_pM dadas por α e β têm det positivo.

Obs.: Se $\beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ é conexo então $\alpha^{-1} \circ \beta: \beta^{-1}(V_0 \cap V_1) \to \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1)$ tem det J com mesmo sinal $\forall x \in \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$, mas em geral $\beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ não é conexo.

Def.: Se M é k-vdd de $\mathbb{R}^n$ então um atlas de classe C^k sobre M é uma coleção $\mathcal{A}$ de parametrizações $\alpha_i: U_i \to V_i$ de classe C^k tais que $M = \bigcup_{i\in I} V_i$

$\mathcal{A}$ é um atlas compatível se α, β são compatíveis, $\forall\, \alpha,\beta \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ é um atlas compatível máximo quando não existe atlas compatível $\mathcal{B}$ de classe C^k sobre M tal que $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$.

Obs.: Dado um atlas $\mathcal{A}$ compatível existe um único atlas maximal compatível que o contém.

Def.: M k-vdd em $\mathbb{R}^n$ é orientável se existe ao menos um atlas compatível de classe C^k sobre M.

Fixado tal atlas $\mathcal{A}$ M está orientada por ele e as parametrizações de A são chamadas positivas.

Exemplos: 1) $M = \alpha(U)$, $\alpha: U \to V$ de classe C^k é orientável

2) $V \subset M$ aberto, M orientável $\Rightarrow$ V é orientável

$\alpha|_{\alpha^{-1}(V\cap V_0)}$.

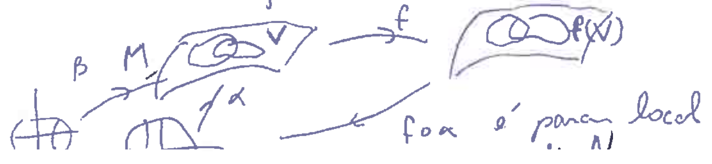
Def.: M, N variedades de classe C^k.

$f: M \to N$ é difeo de classe C^k é uma bijeção de classe C^k com inversa $f^{-1}: N \to M$ de classe C^k.

Neste caso $D_pf(p): T_pM \to T_{f(p)}N$ é iso linear $\Longrightarrow$ M têm mesma dimensão

(A recíproca é falsa: Se $Df(p)$ é iso linear, $\forall p \in M$, f é difeo local apenas)

• M e N são difeomorfas e M é orientável $\Rightarrow$ N orientável



$(f\circ\alpha)^{-1}\circ(f\circ\beta) = \alpha^{-1}\circ\beta$ tem Jacobiano >0 pois M é orientável $\Rightarrow$ N orientável

Obs: (Revertendo ~~[illegible]~~ sinal de uma parametrização)

M k-vdd em $\mathbb{R}^n$

se $\alpha : U_0 \to V_0$ é param. de M de classe C^k

existe $\tilde{\alpha} : U_1 \to V_0$ param. de M de classe C^r tal que

para todo $\beta : U \to V_1$ com $V_1 \cap V_0 \neq \emptyset$ temos ~~[illegible]~~

$\det J(\beta^{-1} \circ \alpha)(x) = -\det J(\beta^{-1} \circ \tilde{\alpha})(\tilde{x})$ para todo $x \in U_0$ e $\tilde{x} \in U_1$ tais

que $\alpha(x) = \alpha(\tilde{x})$. Basta tomar difeo $\xi : U_0 \to U_1$ de classe C^k

tal que $\det J\xi < 0$, por exemplo $\xi(x_1, \dots, x_k) = (-x_1, \dots, x_k)$ e $U_1 = \xi(U_0)$

Exemplo: Se M admite atlas com duas parametrizações $\alpha : U_0 \to V_0$

e $\beta : U_1 \to V_1$ com $V_0 \cap V_1$ conexo então M é orientável.

De fato $\alpha^{-1}(V_0 \cap V_1)$ conexo $\Rightarrow$ $J D(\beta^{-1} \circ \alpha)(x)$ tem sinal constante $\forall x \in \alpha^{-1}(V_0 \cap$

se for positivo $\Rightarrow$ $\mathcal{Q} = \{\alpha, \beta\}$ é atlas compatível.

se for negativo: mudamos o sinal de α e obtemos atlas compatível

Em particular S^n, $n \geq 2$ é orientável:

Se $p = e_n$ e $q = -p$ e $V_0 = S^n - \{p\}$ e $V_1 = S^n - \{q\}$

temos $S^n = V_0 \cup V_1$ e $V_0 \cap V_1$ conexo, pois $n \geq 2$.

Usando as projeções estereográficas $\alpha : V_0 \to \mathbb{R}^n$ e sua inversa $\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to V_0$

são de classe C^∞ e $\alpha(\alpha^{-1}(y)) = y$, $\forall y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow D\alpha^{-1}(y)$ é injetora

$\Rightarrow \alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \to V_0$ é parametrização C^∞

Fazendo $\beta : \mathbb{R}^n \to V_1$ com $\beta(y) = -\alpha^{-1}(y)$ temos outra parametrização

Logo $\mathcal{Q} = \{\alpha^{-1}, \beta\}$ é atlas compatível $\Rightarrow S^n$ é orientável

Se $n = 1$ então $S^1 - \{p, q\}$ não é conexo mas $\alpha : \mathbb{R} \to S^1 - \{p\}$ e $\beta : \mathbb{R} \to S^1 - \{q\}$ dadas

por $\alpha(t) = \left(\dfrac{2t}{t^2+1}, \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \right)$ e $\beta(t) = \left(\dfrac{-2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{t^2+1} \right)$ cobrem S^1 e $\alpha(t) = \beta(-1/t)$

$\Rightarrow \beta^{-1} \circ \alpha : \mathbb{R}_* \to \mathbb{R}_*$ é $\beta^{-1} \circ \alpha = -1/t$

$\Rightarrow D(\beta^{-1} \circ \alpha) = 1/t^2 > 0$

Teorema: seja $\mathcal{A}$ atlas coerente máximo de classe $\mathcal{C}^k$ sobre uma k-vdd M e $\xi: V_0 \to V$ param. C^k de M tal que $\xi \notin \mathcal{A}$. Se V é conexo então para toda $\alpha: U_1 \to W$, $\alpha \in \mathcal{A}$, temos $\det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x) < 0$, $\forall x \in \xi^{-1}(V \cap W)$

Dem.: Sejam $A = \{ p = \xi(x) \in V : p = \alpha(y)$, $\alpha: U_1 \to W$ é param. de $M\}$ com $\det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x) < 0$, $\alpha \in \mathcal{A}$

e $B = \{ p = \xi(x) \in V : p = \beta(y)$, $\beta: U_2 \to Z$ é param de M com $\det D(\beta^{-1} \circ \xi)(x) > 0$, $\beta \in \mathcal{A}\}$

$\mathcal{A}$ é atlas $\Rightarrow$ $V = A \cup B$.

Se existe $p \in V$ tq $p = \xi(x) = \alpha(y) \in A \cap B$ temos

$$0 < \det D(\beta^{-1} \circ \xi)(x) = \det D\left((\beta^{-1} \circ \alpha) \circ (\alpha^{-1} \circ \xi)\right)(x)$$
$$= \underbrace{\det D(\beta^{-1} \circ \alpha)(y)}_{>0} \cdot \underbrace{\det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x)}_{<0} < 0$$

$V = A \cup B$ é uma cisão de V. Como $A \neq \emptyset$ (pois $\mathcal{A}$ é máximo) e V é conexo temos $B = \emptyset$.

Corolário: Se M é k-vdd admite atlas coerente de classe $\mathcal{C}^1$ então admite atlas de classe $\mathcal{C}^k$.

Dem.: $\mathcal{A}$: atlas máximo C^1 coerente sobre M

$\mathcal{A}_k = \{ \varphi : U \to V$ param. de classe $\mathcal{C}^k$; $\varphi \in \mathcal{A}$ e V conexo$\}$

$\mathcal{A}_k \subset \mathcal{A} \Rightarrow \alpha, \beta \in \mathcal{A}_k$ são coerentes.

Se $p \in M$ existe V aberto conexo de M tq $p \in V$ e $\xi: U \to V$ é param. de classe C^k.

- $\xi \in \mathcal{A} \Rightarrow \xi \in \mathcal{A}_k$
- $\xi \notin \mathcal{A} \Rightarrow \det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x) < 0$, $\forall \alpha: U \to W \in \mathcal{A}$ com $V \cap W \neq \emptyset$.

Fazendo $\tilde{\xi}$ a param. com sinal invertido de ξ temos $\tilde{\xi} \in \mathcal{A}$ de classe $\mathcal{C}^k$
$\Rightarrow \tilde{\xi} \in \mathcal{A}_k$, logo $\mathcal{A}_k$ é atlas sobre M.

Se $\mathcal{Q}$ é atlas coerente máximo que orienta M então

$\xi: U_0 \to W$ é negativa se $\forall\, \alpha: U_1 \to V$ e todo $p \in V \cap W$, $p = \xi(x)$ temos

$\det D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x) < 0$. Se V é conexo, ξ é negativa $\iff \xi \notin \mathcal{Q}$.

Duas param. negativas são sempre coerentes, $\xi: U_0 \to V_0$ e $\zeta: U_1 \to V_1$ negativas, $U_1 \cap V_1$;

e $\alpha: U \to V$ positiva temos

$$\det D(\zeta^{-1} \circ \xi)(x) = \det \underbrace{D(\zeta^{-1} \circ \alpha)(y)}_{<0} \cdot \det \underbrace{D(\alpha^{-1} \circ \xi)(x)}_{<0} > 0$$

para todo $x \in \xi^{-1}(V_0 \cap V_1)$, onde $y = \alpha^{-1}(p)$, $p \in \xi(x) \in U_1 \cap V_1$.

Deste modo as parametrizações negativas formam um atlas coerente máximo $\mathcal{Q}^*$, que define orientação oposta à de $\mathcal{Q}$ para M.

Corolário: Sejam $\alpha: U_0 \to V_0$ e $\beta: U_1 \to V_1$ param. de classe C^1 de uma k-variedade M com $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ e V_0, V_1 conexos. Se $\det D(\beta^{-1} \circ \alpha)(x)$ muda de sinal então M não é orientável.

Dem.: Se M fosse orientável então α e β não podem estar num mesmo atlas máximo coerente, e também não ocorre uma em $\mathcal{Q}$ e a outra não (pois o det seria sempre negativo).

Se $\alpha \notin \mathcal{Q}$ e $\beta \notin \mathcal{Q}$ então α e β são negativas e coerentes, outra contradição.

Logo M é não orientável.

Como $\det D(\beta^{-1} \circ \alpha)(x) \neq 0$, $\forall x \in \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1) \implies V_0 \cap V_1$ é desconexa.

Exemplo: $M \subset \mathbb{R}^6$, $M = \{ A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) : \text{posto } A = 1 \}$

$$M = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^6 - \{0\} : u \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3 \text{ e } \{u,v\} \text{ é l.d.} \}$$

Assim $M = V_1 \cup V_2$, onde $V_1 \subset M$ são as matrizes de primeira linha não-nula e $V_2 \subset M$ " " " segunda " " .

Sejam ~~$\alpha : (\mathbb{R}^3 - \{0\} \times \mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$~~

$\alpha : \mathbb{R}^3 - \{0\} \times \mathbb{R} \to V_1$ e $\beta : \mathbb{R}^3 - \{0\} \times \mathbb{R} \to V_2$ dadas por

$\alpha(v,t) = (v, tv)$ e $\beta(v,t) = (tv, v)$ são param. de classe C^∞ e

$\alpha^{-1}(V_1 \cap V_2) = \beta^{-1}(V_1 \cap V_2)$ tem duas componentes conexas: $\mathbb{R}^3 - \{0\} \times (-\infty, 0)$ e

$\alpha^{-1}(v_1, v_2) = (v_1, v_2/\alpha)$

$\mathbb{R}^3 - \{0\} \times (0, +\infty)$.

$(\beta^{-1} \circ \alpha)(v,t) = (tv, 1/t) = (tx, ty, tz, 1/t)$ satisfaz

$\det D(\beta^{-1} \circ \alpha)(v,t) = -t$, que troca de sinal em cada componente conexa. Logo M é 4-vdd de classe C^∞ em $\mathbb{R}^6$ não orientável.

Def.: Seja M k-vdd em $\mathbb{R}^n$. Então $T_pM^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n : \langle v, u \rangle = 0, \forall u \in T_pM \}$ é o espaço normal a M em p, isto é, $T_pM^\perp = (T_pM)^\perp$.

$\dim T_pM^\perp = n - k$.

<u>Exemplos</u>: $T_pS^n = \{ \alpha p : \alpha \in \mathbb{R} \}$

Em geral, se M é imagem inversa de valor regular de uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ então $T_pM^\perp = [\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)]$.

Para a esfera temos $f^{-1}(1)$, $f(x) = \langle x, x \rangle$ com $\nabla f(x) = 2x$.

Um campo de vetores normais sobre M é um campo de vetores definido em M tal que $v_p \in T_pM^\perp$.

Teorema: Se M é k-vdd de $\mathbb{R}^n$ e admite $n-k$ campos vetoriais normais contínuos e l.i em cada ponto então M é orientável 1

Dem.: Seja $\mathcal{Q} = \{\alpha: U \to V$; param. de classe C^1 com U conexo tais que

$$\Phi = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(x) \cdots \frac{\partial \alpha}{\partial x_k}(x) \; v_1(\alpha(x)) \cdots v_{n-k}(\alpha(x)) \right]_{n\times n} \text{ tem det} > 0 \}$$

Φ é contínua em $x \Rightarrow \det \Phi$ mantém o sinal em U

Se $\det \Phi < 0$ troque o sinal de α.

Logo $\mathcal{Q}$ é atlas C^1 para M.

Compatibilidade: Sejam $\alpha: U_0 \to V_0$ e $\beta: U_1 \to V_1$ param. de $\mathcal{Q}$

com $p = \alpha(x) = \beta(y) \in V_0 \cap V_1$.

$D(\beta^{-1}\circ\alpha)(x) = (a_{ij})$ onde $\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial \beta}{\partial y_i}(y)$

ou seja, $\Phi(x) = \underbrace{\tilde{\Phi}(y)}_{\leftarrow\, \Phi \text{ da } \beta} \cdot \begin{pmatrix} (a_{ij})_{k\times k} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}_{n\times n} \Rightarrow \det \Phi(x) = \det \tilde{\Phi}(y) \cdot \det(a_{ij})$

$\Rightarrow \det(a_{ij}) > 0 \Rightarrow \alpha$ e β são comp. #

Corolário: Se $M = f^{-1}(c)$ então M é orientável

Isto mostra que as matrizes 2×3 de posto não são imagem inversa de valor regular e $O(n)$ é orientável.

Obs.: Se existem apenas r campos normais contínuos l.i., $r < n-k$, então pode não ser orientável. $M \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \leftarrow$ toma $e_{n+1}, \dots, e_r$.

se M não for orientável...

Teorema: $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é orientável $\Longleftrightarrow$ existe $v: M \to \mathbb{R}^{n+1}$ contínuo tal que $v(p) \neq 0$, $\forall p \in M$.

Dem.: ($\Leftarrow$) ok!

($\Rightarrow$) M orientável escolha para cada p um dos vetores unitários normais de modo que para cada $\alpha: U \to V$ positiva $\alpha(x) = p \in V$ temos

$$\Phi(x) = \left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(x) \ \cdots \ \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}(x) \ \ u(\alpha(x)) \right]$$ tenha $\det \geq 0$

não depende da parametrização positiva tomada.

Basta ver que u é contínua. M é, localmente, imagem inversa de valor regular e portanto coberta por parametrizações que têm $\nabla f(p)/\|\nabla f(p)\|$ como campo unitário normal. Nesse caso $\forall \alpha: U \to V$ positiva

temos $\det \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \ \cdots \ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \ \ \nabla f(p)/\|\nabla f(p)\| \right] > 0$ ok fazemos $u = \nabla f(p)/\|\cdots\|$

ou < 0 aí fazemos $u = -\nabla f(p)/\|\cdots\|$

Exemplo: Faixa de Möbius.

$f: [0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$: $f(s,t) = \gamma(t) + (s - 1/2)\,\delta(t)$

$\gamma(\cos t, \sin t, 0)$, $\delta = \cos(t/2)\,\gamma(t) + \sin(t/2) \cdot e_3$.

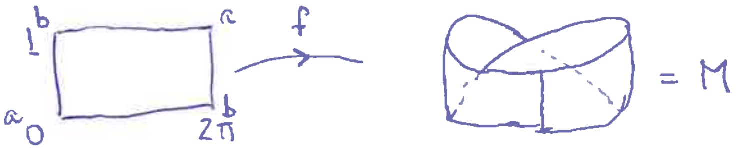
Teorema: $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é orientável $\iff$ existe campo vetores $v: M \to \mathbb{R}^{n+1}$, contínuo, normal a M tal que $v(p) \neq 0$, $\forall p \in M$.

Dem.: ($\Leftarrow$) ok!

($\Rightarrow$) M orientável: escolha em cada $p \in M$ um vetor unitário normal, $\mu(p)$, tal que para cada $\alpha: U \to V$ positiva $\alpha(x) = p \in V$ temos

$$\det\left[\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}(x) \dots \frac{\partial \alpha}{\partial x_n}(x) \quad \mu(p)\right] > 0$$ (ñ depende da parametrização positiva tomada)

$\mu: M \to \mathbb{R}^n$ é contínuo pois M é localmente imagem inversa de valor regular, donde é coberta por parametrizações que têm $\nabla f / \|\nabla f\|$ como normal unitário basta tomar $\mu = \nabla f/|\nabla f|$ ou $\mu = -\nabla f/|\nabla f|$.

Exemplo: Faixa de Möbius 

$f: (0,1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(s,t) = \gamma(t) + (s - 1/2)\,\delta(t)$, com

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ e $\delta(t) = \cos(t/2)\,\gamma(t) + \sin(t/2) \cdot e_3$

tem como imagem a faixa de Möbius e $f\big|_{(0,1)\times(a,b)}$, $b - a \leq \pi$ é parametrização C^∞ para M.

(Em geral, se $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é vdd orientável e $\gamma: [a,b] \to M$ é curva fechada ~~e~~ e μ é campo normal unitário a M ao longo de γ então $\mu(a) = \mu(b)$ pois para qualquer campo normal unitário sobre M temos $\langle v(\gamma(t)), \mu(t)\rangle = \pm 1 \Rightarrow$

$v(\gamma(t)) = \pm\mu(t)$

$\Rightarrow v(\gamma(a)) = \pm\mu(a)$ e $v(\gamma(b)) = \pm\mu(b)$

$\Rightarrow \mu(a) = \mu(b)$.

$\gamma(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ é caminho fechado na faixa de Möbius e o campo normal $\mu(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ é $\mu(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(1/2, t) \times \frac{\partial f}{\partial t}(1/2, t) = \cdots$ e $\mu(0) = -\mu(2\pi) \Rightarrow$ M não é orientável

Exemplo: Plano projetivo em $\mathbb{R}^4$.

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ dado por $f(x,y,z)=(x^2-y^2,\ xy,\ xz,\ yz)$

$\mathbb{RP}^2=f(S^2)$ é 2-vdd C^∞ em $\mathbb{R}^4$:

•) $f(p)=f(q) \iff p=\pm q$

•) $Df(p):\mathbb{R}^3_p\to\mathbb{R}^4_{f(p)}$ é injetiva se restrita a cada T_pS^2, $p=(x,y,z)$ pois

$$Df(p)=\begin{bmatrix} 2x & -2y & 0\\ y & x & 0\\ z & 0 & x\\ 0 & z & y\end{bmatrix}$$ tem os menores $\det\begin{bmatrix} 2x & -2y & 0\\ y & x & 0\\ z & 0 & x\end{bmatrix}=2x(x^2+y^2)$

e $\det\begin{bmatrix} 2x & -2y & 0\\ y & x & 0\\ 0 & z & y\end{bmatrix}=2y(x^2+y^2)$.

não nulos se $x,y\neq 0 \Rightarrow Df(p)$ é injetiva em $S^2-\{(0,0,\pm1)\}$

Em $p=(0,0,\pm1)$ temos $Df(0,0,\pm1)(e_1)=\pm e_3$ e $Df(0,0,\pm1)(e_2)=\pm e_4$.

Mas $T_pS^2=[e_1,e_2]$ e $Df_p(T_pS^2)=[e_3,e_4] \Rightarrow \dim \operatorname{Im} Df_p=2$

$\Rightarrow \dim \ker Df_p=0,\ \forall p\in S^2$.

•) Se $\alpha:U\to V$ é param. de S^2 então então $f\circ\alpha: U\to\mathbb{R}^4$ é imersão e se V não contém pontos antípodas $f\circ\alpha$ é injetora.

• Nesse caso, $f\circ\alpha$ é homeo de U sobre um aberto W de $\mathbb{RP}^2$, pois $f|_{S^2}:S^2\to\mathbb{RP}^2$ é aberta: se $A\subset S^2$ é aberto mostremos que $\mathbb{RP}^2-f(A)$ é fechado.

$$f^{-1}(\mathbb{RP}^2-f(A))=S^2-f^{-1}(f(A))=S^2-(\underbrace{A\cup \overset{\{x\in S:\ -x\in A\}}{-A}}_{\text{aberto}})$$ é fechado

$\Rightarrow \mathbb{RP}^2-f(A)$ é fechado.

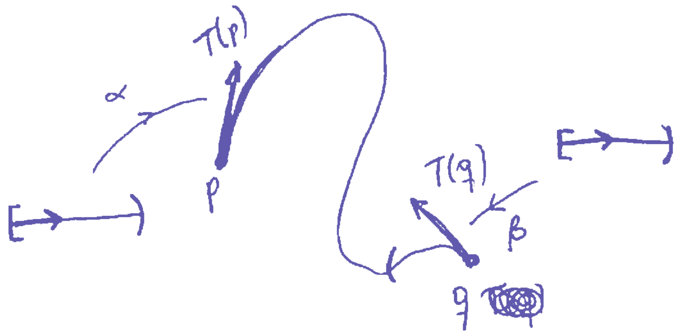
Logo $\mathbb{RP}^2$ é 2-vdd em $\mathbb{R}^4$ compacta $(\mathbb{RP}^2=f(S^2))$ e não orientável pois contém um aberto homeomorfo à faixa de Möbius $f(\mathring{R})$, $R=\{(x,y,z)\in S^2:\ y\geq 0 \text{ e } -1/2\leq z\leq 1/2\}$, $f|_{\mathring{R}}$ é homeo mas $f(\partial R)$ cola "invertendo" duas componentes do bordo $f(p)=f(-p)$.

~~Orientação no bordo de uma variedade~~

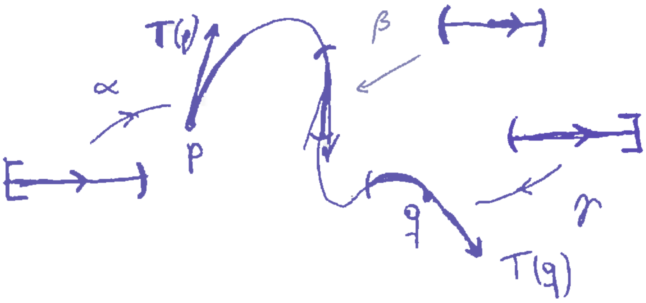
Para 1-variedades a orientação se dá pelo vetor tangente:

Se $p \in M$ e $\alpha : I \to V$ é param. com $\underset{\alpha(t_0)}{\underset{\shortparallel}{p}} \in V$ defina $T(p) = \left(p, \frac{D\alpha(t_0)}{|D\alpha(t_0)|}\right)$

Se M tem bordo há um problema:



Vamos permitir cobrir M por abertos de $\mathbb{R}$, H^1 e $L^1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ aí o problema some.



Orientação no bordo de uma variedade:

Teorema: Seja $k > 1$. Se M é k-variedade orientável e com bordo, então ∂M é orientável.

Dem.: Seja $p \in \partial M$ e $\alpha : U \subset H^k \to V \subset \mathbb{R}^n$ uma param. em torno de p.

Sendo $h : \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ dada por $h(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0)$ temos que $\alpha_0 : \overset{U \cap}{\mathbb{R}^{k-1}} \times \{0\} \to V \subset \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha_0(p) = (\alpha \circ h)(p)$ é param. de ∂M em torno de p.

Sejam $\alpha : U_0 \to V_0$ e $\alpha_1 : U_1 \to V_1$ parametrizações de M compatíveis em torno de p. e $g : \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1) \to \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ dada por $g(x) = (\beta^{-1} \circ \alpha)(x)$.

$\det Dg(x) > 0$, $\forall x \in \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1)$.