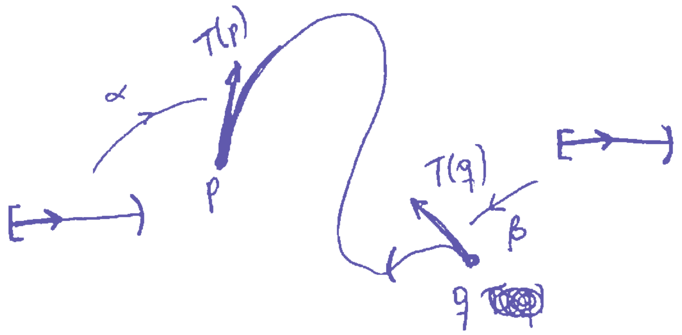
~~Orientação no bordo de uma variedade~~

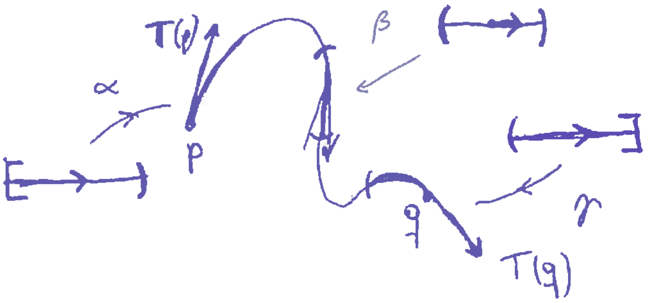
Para 1-variedades a orientação se dá pelo vetor tangente:

Se $p \in M$ e $\alpha: I \to V$ e param. com $\underset{\alpha(t_0)}{\overset{\shortparallel}{p}} \in V$ definia $T(p) = \left(p, D\alpha(t_0)/|D\alpha(t_0)|\right)$

Se M tem bordo há um problema:



Vamos permitir cobrir M por abertos de $\mathbb{R}$, H^1 e $L^1 = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ aí o problema some.



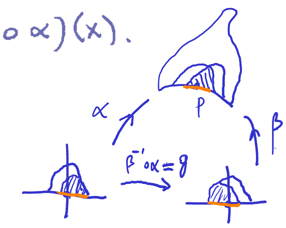
Orientação no bordo de uma variedade:

Teorema: Seja $k > 1$. Se M é k-variedade orientável e com bordo, então ∂M é orientável.

Dem.: Seja $p \in \partial M$ e $\alpha: U \subset H^k \to V \subset \mathbb{R}^n$ uma param. em torno de p. Sendo $h: \mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ dada por $h(x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, \dots, x_{k-1}, 0)$ temos que $\alpha_0 : \overset{U \cap}{\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}} \to V \subset \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha_0(p) = (\alpha \circ h)(p)$ é param. de ∂M em torno de p.

Sejam $\alpha: U_0 \to V_0$ e $\overset{\beta}{\cancel{\alpha_1}} : U_1 \to V_1$ parametrizações de M compatíveis em torno de p. e $g: \alpha^{-1}(V_0 \cap V_1) \to \beta^{-1}(V_0 \cap V_1)$ dada por $g(x) = (\beta^{-1} \circ \alpha)(x)$.

$\det Dg(x) > 0$, $\forall x \in \underset{\beta}{\cancel{\alpha}}^{-1}(V_0 \cap V_1)$.



Se $x \in \partial H^k$ então $\nabla g_k(x) = [0 \dots 0 \ \ \partial g_k/\partial x_k]$ com $\partial g_k/\partial x_k > 0$, pois se mexermos em $x_1, \dots, x_{k-1}$ $g_k(x)$ não muda e se aumentamos x_k $g_k(x)$ aumenta.

Como $\det Dg(x) > 0$, $\forall x \in H^k$ ($\therefore x \in \partial H^k$) e $\partial g_k/\partial x_k (x) > 0$ temos que $\det \dfrac{\partial(g_1, \dots, g_{k-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{k-1})} > 0$. Esta matriz é a da diferencial de $g_0 = \beta_0 \circ \alpha_0^{-1}$, a mudança de coordenadas no bordo. #

Obs.: Nem sempre a orientação que M induz no bordo é a "melhor".

Definição: Seja M uma k-variedade com bordo e orientável.
A orientação induzida no bordo de M é:

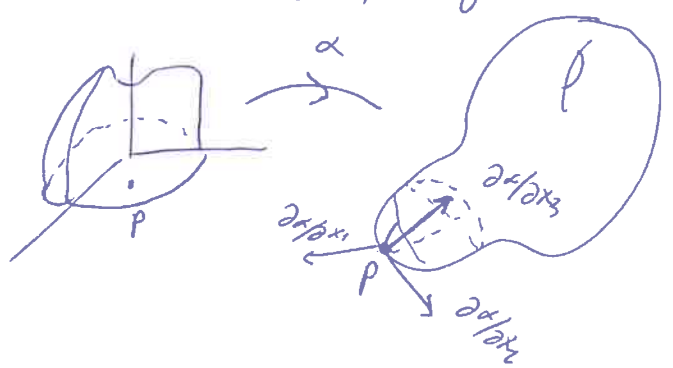
•) a orientação dada pelas restrições das parametrizações, se k é par

•) a oposta à dada pelas restrições se k é ímpar.

Exemplos: S^2 e T^2 são 2-variedades orientáveis (imgs inversas de valores regulares) e são bordos de 3 variedades em $\mathbb{R}^3$.

Em geral, se é dada uma orientação para 3-vdd M em $\mathbb{R}^3$ como fica a orientação induzida sobre ∂M? É dada pelo vetor normal que aponta para fora de M.

Seja $\alpha : U \to V$ param de M e $\alpha_0 = \alpha \circ h$ a param. do bordo.
Como $k=3$ a base $\{\partial\alpha/\partial x_1, \partial\alpha/\partial x_2, -n\}$ de $T_p\mathbb{R}^3$ é positiva bem como $\{\partial\alpha/\partial x_1, \partial\alpha/\partial x_2, \partial\alpha/\partial x_3\}$, logo $-n$ e $\partial\alpha/\partial x_3$ estão do mesmo lado do plano tangente a ∂M em p

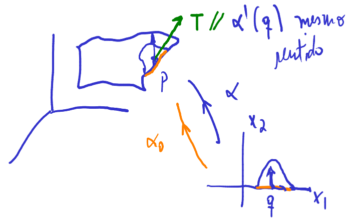


$\partial\alpha/\partial x_3$ aponta p/ dentro $\Rightarrow$ n aponta para fora.

Exemplo: Se M é 2-variedade com bordo e orientada em $\mathbb{R}^3$ considere n o campo normal unitário correspondente à orientação de M, isto é, $\det\left[\partial\alpha/\partial x_1 \;\; \partial\alpha/\partial x_2 \;\; n\right] > 0$ e seja T o vetor unitário tangente a ∂M.

Se $\alpha: U \to V$ é parametrização de M em torno de $p \in \partial M$ compatível com a orientação de M então $\alpha_0 = \alpha \circ h$ é compatível com a orientação induzida no bordo de M, pois $k=2$. $\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_1}$ tem mesmo sentido de T

↖ vetor velocidade à curva coordenada.



$\dfrac{\partial\alpha}{\partial x_2}$ aponta para M, mas não é ortogonal a ∂M, porém existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\omega = \partial\alpha/\partial x_2 + \lambda\, \partial\alpha/\partial x_1$ é ortogonal a ∂M, ou seja a $\partial\alpha/\partial x_1$ e a T. Defina o campo $W(p) = \left(p;\, \omega(p)/\|\omega(p)\|\right)$

$(p; n(p)) = N$ é tal que $\det\left[\partial\alpha/\partial x_1 \;\; \partial\alpha/\partial x_2 \;\; n\right] > 0$ e

$$\det\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} \;\; \frac{\partial\alpha}{\partial x_2} \;\; n\right] = \det\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} \;\; \omega \;\; n\right]$$

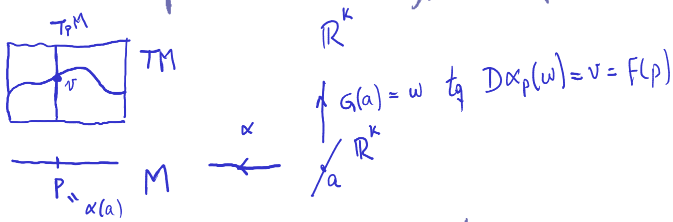
Logo os campos $\{T, W, N\}$ são base positiva para $T_p\mathbb{R}^3$.

A orientação do bordo é a que mantém a superfície à esquerda.

Campos de vetores e formas diferenciais em variedades:

Definição: Seja M uma k-vdd de $\mathbb{R}^n$. Um campo de vetores sobre M é uma aplicação $F: M \to TM$

$$x \longmapsto (x;\, v_x) \in T_xM$$



Se $\alpha: U \to V$ é sist. de coordenadas em torno de x, existe único campo $G: U \to \mathbb{R}^k$ tal que $\alpha_*(G(a)) = F(\alpha(a))$, $\forall\, a \in U$.

F é difível se G o for.

Definição: Seja M^k vdd de $\mathbb{R}^n$. Uma p-forma diferencial é uma aplicação $\omega : M \longrightarrow$ fibrado das p-formas sobre M.

$$x \longmapsto \omega(x) \in \Omega^p(T_x M)$$

Se $\alpha : U \to V$ é sist. de coords então $f_\alpha^*(\omega)$ é p-forma em U e ω é diferenciável se $f_\alpha^* \omega$ o é.

$\omega_{\alpha(q)}(D\alpha_q(v_1), \dots, D\alpha_q(v_p))$ é definida em $(\mathbb{R}^k_q)^p$

ω é p-forma em M $\Longrightarrow$ $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1 \cdots i_p}\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$.

$d\omega = ?$ $\quad \omega_{i_1 \cdots i_p} : M \to \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{\partial \omega_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x_j} = ?$

Alternativa:

Teorema: Para cada p-forma ω em M existe uma única (p+1) forma $d\omega$ em M tal que $\alpha^*(d\omega) = d(\alpha^*\omega)$, para todo sist. de coords α de M.

Dem.: Sejam $\alpha : U \to V$ sistema de coordenadas tal que $x = \alpha(a)$ e $v_1, \dots, v_{p+1} \in T_x M$. Existem únicos $w_1, \dots, w_{p+1} \in \mathbb{R}^k_a$ tq $\alpha_*(w_j) = v_j$.

Definindo $d\omega(x)(v_1, \dots, v_{p+1}) = d(\alpha^*\omega)(a)(w_1, \dots, w_{p+1})$

temos que $\alpha^*(d\omega) = d(\alpha^*\omega)$

$\cancel{f^*(d\omega)(a)(w_1, \dots, w_{p+1}) = d\omega(x)(f_* w_1, \dots, f_* w_{p+1}) = d\omega(x)(v_1, \dots, v_{p+1})}$, $x = f(a)$

$\cancel{d(f^*\omega)(a)(w_1, \dots, w_p) = d\omega(x)(}$

Se $\beta : U_0 \to V_0$ é outro sist. de coordenadas com $\beta(b) = x$ então

$$d(\beta^*\omega)(b)(u_1, \dots, u_{p+1}) = d\omega(x)(\beta_* u_1, \dots, \beta_* u_{p+1}) = d\omega(x)(\alpha_* w_1, \dots, \alpha_* w_{p+1})$$
$$= d(\alpha^*\omega)(a)(w_1, \dots, w_{p+1})$$

$(u_i)_b = (\beta^{-1} \circ \alpha)_* (w_i)_{(a)}$

Se M é k-vdd com bordo de $\mathbb{R}^n$ e ω é p-forma sobre M e c é um p-cubo singular em M definimos:

$$\int_c \omega = \int_{[0,1]^p} c^*\omega \quad \text{como antes.}$$

Vamos supor que se $p=k$ e α é sist. de coords $U \to W$ então $c(x) = \cancel{f}\,\alpha(x)$, $\forall x \in [0,1]^k$. Se M é orientada dizemos que c preserva orientação se $\cancel{f}\,\alpha$ o fizer.

Teorema: Sejam $c_1, c_2 : [0,1]^k \to M$ dois k-cubos singulares que preservam orientação sobre uma k-variedade orientada M e ω k-forma em M tal que $\omega = 0$ fora de $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k)$. Então $\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega$.

Dem.: $$\int_{c_1} \omega = \int_{[0,1]^k} c_1^*(\omega).$$

$$c_2^{-1}\circ c_1 : A \subset [0,1]^k \to B \subset [0,1]^k$$

$\omega = 0$ fora de $c_1([0,1]^k) \cap c_2([0,1]^k) \Longrightarrow$

$$\int_{[0,1]^k} c_1^*\omega = \int_{[0,1]^k} (c_2^{-1}\circ c_1)^* c_2^*(\omega) \qquad (c_2^{-1}\circ c_1)^* = c_1^*\circ c_2^{-1*}$$

Se $c_2^*(\omega) = f\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_k$ e $g = c_2^{-1}\circ c_1$ temos

$$(c_2^{-1}\circ c_1)^* c_2^*(\omega) = g^*(f\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_k)$$
$$= (f\circ g)(\cdot)\cdot \det Dg \cdot dx_1\wedge\dots\wedge dx_k$$
$$= (f\circ g)(\cdot)\cdot |\det Dg|\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_k, \text{ pois } \det Dg > 0.$$

Logo $$\int_{[0,1]^k} (c_2^{-1}\circ c_1)^* c_2^*(\omega) = \int_{[0,1]^k} (f\circ g)(\cdot)\,|\det Dg|\, dx_1\wedge\dots\wedge dx_k$$
$$= \int_{[0,1]^k} (f\circ g)(\cdot)\,|\det Dg| = \int_{g([0,1]^k)} f = \int_{g([0,1]^k)} f\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_k$$
$$= \int_{[0,1]^k} c_2^*(\omega) = \int c_2^*\omega$$

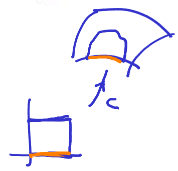
Se c é k-cubo em M tal que $\omega = 0$ fora de $c([0,1]^k)$ podemos definir $\int_M \omega = \int_c \omega$.

Em geral se ω é k-forma sobre uma k-vard M orientável então existe cobertura aberta $\mathcal{O}$ para M tal que $U \subset c([0,1]^k)$, para todo $U \in \mathcal{O}$, onde c é k-cubo que preserva-orientação.

Se Φ é p.u. subordinada a $\mathcal{O}$ definimos $\int_M \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi \cdot \omega$

se a soma convergir (por exemplo, se M é compacta)

Quando M^k é orientada e com bordo não-vazio orientado pela orientação induzida e c é k-cubo que preserva orientação tal que $c_{(k,0)} \subset \partial M$ e é a única face cujos pontos do seu interior estão em ∂M temos que $c_{(k,0)}$ preserva orientação $\iff$ k é par.



Nesse caso, se ω é $k-1$ forma em M que se anula fora de $V \subset c([0,1]^k)$ então

$$\int_{c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{\partial M} \omega .$$

V aberto de M tq $V \cap \partial M$ é aberto não vazio

Por outro lado ∂c tem $c_{(k,0)}$ com coef. $(-1)^k$ e então

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{(-1)^k c_{(k,0)}} \omega = (-1)^k \int_{c_{(k,0)}} \omega = \int_{\partial M} \omega .$$

(Justifica a escolha da orientação para o bordo)