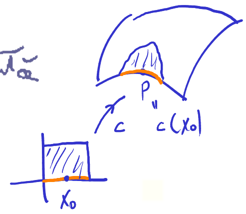
Teorema (de Stokes): Se M^k é compacta e orientada com $\partial M \neq \emptyset$ e ω é $(k-1)$-forma sobre M então $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$, se ∂M tem a orientação induzida.

Dem.: 1) Se c é k-cubo em $M - \partial M$ tal que $\operatorname{supp} \omega \subset \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aberto.}}}{V} \subset c([0,1]^k)$

então $$\int_c d\omega = \int_{[0,1]^k} c^*(d\omega) = \int_{[0,1]^k} d(c^*\omega) = \int_{\partial [0,1]^k} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

e $$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = 0 \quad (\omega|_{\partial c} = 0) \quad \text{e} \quad \int_{\partial M} \omega = 0 \quad (\omega|_{\partial M} \equiv 0)$$

2) Se c é k-cubo que preserva orientação tal que $c_{(k,0)}$ é a única face em ∂M e $\operatorname{supp} \omega \subset c([0,1]^k)$ então



$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega = \int_{\partial M} \omega.$$

3) Em geral, se $\mathcal{O}$ é cobertura aberta de M e Φ é p.u. subordinada a $\mathcal{O}$ tal que $\varphi.\omega$ é do tipo (1) ou (2) acima então

$$0 = d(1) = d\Big(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi\Big) = \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi$$

$$\Longrightarrow \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi \wedge \omega = 0 \quad (\text{soma finita})$$

$$\Rightarrow \int_M \sum_{\varphi \in \Phi} d\varphi \wedge \omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d\varphi \wedge \omega = 0. \text{ Então}$$

$$\int_M d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \varphi . d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M \overset{0}{d\varphi \wedge \omega} + \varphi d\omega = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_M d(\varphi.\omega) =$$

$$= \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{\partial M} \varphi.\omega = \int_{\partial M} \sum \varphi.\omega = \int_{\partial M} \omega. \ \#$$

Elemento de volume:

$M^k \subset \mathbb{R}^n$ variedade orientada

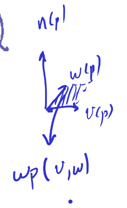
para $p \in M$ está definido o elemento de volume de M:

$\omega(p) \in \Omega^k(T_pM)$ é a única k-forma tal que $\omega_p(v_{1p}, \dots, v_{kp}) = 1$ para toda base o.n. positiva de T_pM. (depende da orientação e do produto interno em T_pM)

ω_p é denotada por dV (mesmo quando não é $d\eta$ para $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$).

O volume de M é $\int_M dV$, que sempre existe se M é compacta.

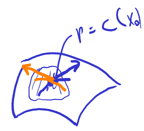
No caso de uma superfície $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ orientada, seja $n(p)$ o normal unitário em $p \in M$. Fazendo $\omega(v,w) = \det[v \ w \ n(p)]$ então $\omega(v,w) = 1$ se $\{v,w\}$ é b.o.n. positiva de T_pM, Logo $dV = \omega$.

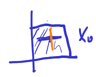


Por outro lado $\omega(v,w) = \langle v \times w, n(p) \rangle \Rightarrow dV(v,w) = \langle v \times w, n(p) \rangle$.

$= |v \times w|$.

Para calcular área de M; $\int_M dV$ devemos saber $\int_{c([0,1]^2)} dV = \int_{[0,1]^2} c^*(dV)$ para 2-cubos que preservam orientação





Exemplo: área da esfera

Fazendo
$$E(x) = \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_1} c^1(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_1} c^2(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial c^3}{\partial x_1}(x)\right]^2 \right)^{1/2}$$
$$F(x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} c(p), \frac{\partial}{\partial x_2} c(p) \right\rangle$$
$$G(x) = \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_2} c^1(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} c_2(x)\right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial x_2} c_3(x)\right]^2 \right)^{1/2}$$

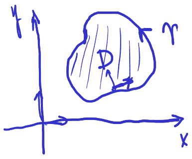
temos
$$c^*(dV)(e_1(p), e_2(p)) = dV(p)\left(c_*(e_1(x)), c_*(e_2(x))\right)$$
$$= \left| \frac{\partial c}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial c}{\partial x_2}(x) \right| = \sqrt{EG - F^2}$$

Exemplo: D região compacta ~~toda~~ limitada por curva γ, fechada e de classe C^1 por partes, em $\mathbb{R}^2$. Então D área $(D) = \int_\gamma x\,dy = \int_\gamma -y\,dx$

$$\text{Área}(D) = \int_D dV = \int_D 1\, dx\wedge dy = \int_{\partial D} x\,dy = \int_\gamma x\,dy$$

$$\int_D 1\, dxdy$$

$$= \int_{\partial D} -y\,dx = \int_\gamma -y\,dx.$$



$d\omega = 1 .\ dx\wedge dy$

$\omega = x\,dy \Rightarrow d\omega = dx\wedge dy$ ✓

$\omega = -y\,dx \Rightarrow d\omega = -1\, dy\wedge dx = dx\wedge dy$ ✓

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$

$$\int_\gamma x\,dy = \int_{[0,1]} x(t)\cdot y'(t)\,.\,dt$$

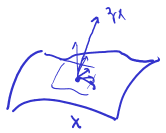
Teorema: Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade orientada e n o campo normal unitário que aponta para fora (ie, $\det[n(x)\ v_1\ v_2] > 0$, $\forall v_1, v_2$ b.o.n positiva de T_xM).

$\to dy\wedge dz(v,w) = v_2w_3 - w_2v_3 = \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \langle v\times w, e_1\rangle$

Então $dA = n_1\, dy\wedge dz + n_2\, dz\wedge dx + n_3\, dx\wedge dy$ e

$$n_1 dA = dy\wedge dz\ ;\ n_2 dA = dz \wedge dx \ \text{ e } \ n_3 dA = dx\wedge dy.$$

Dem.: $dA_x(v_x, w_x) = \det[v_x\ w_x\ n(x)]$



$T_xM \subset T_x\mathbb{R}^3$

$$= \begin{bmatrix} v_1 & w_1 & n_1 \\ v_2 & w_2 & n_2 \\ v_3 & w_3 & n_3 \end{bmatrix} = n_1(v_2w_3 - v_3w_2) + n_2(v_3w_1 - v_1w_3) + n_3(v_1w_2 - v_2w_1)$$

$$= n_1\, dy\wedge dz(v,w) + n_2\, dz\wedge dx(v,w) + n_3\, dx \wedge dy(v,w)$$

Sejam $z \in \mathbb{R}^3_x$ e $v_x, w_x \in T_xM \subset T_x\mathbb{R}^3$; $n(x) = \alpha.(v_x \times w_x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \langle z, n(x)\rangle \langle v_x \times w_x, n(x)\rangle = \langle z, n(x)\rangle \cancel{1/\alpha} \equiv \langle z, v_x\times w_x\rangle$$

Fazendo $z = e_1$ temos $n_1^{(x)} \cdot dA_x(v_x, w_x) = v_2w_3 - v_3w_2 = dx\wedge dy(v_x, w_x)$.

$z = e_2$

$z = e_3$ #

Obs.: Em geral, se $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3_a)$, $a \in \mathbb{R}^3$,

$$\omega = n_1(a)\, dy\wedge dz + n_2(a)\, dz\wedge dx + n_3(a)\, dx\wedge dy$$ nem sempre satisfaz $n_1(a)\,\omega = (dy\wedge dz)(a)$, (vale só se $v, w \in T_aM$ e $n \in (T_aM)^\perp$).

Os teoremas clássicos da análise vetorial:

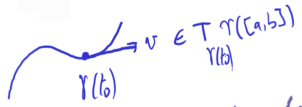
Teorema (de Green): Se $M^2 \subset \mathbb{R}^2$ uma variedade com bordo e compacta.

Se $P, Q: M \to \mathbb{R}$ são diferenciáveis então $\int_{\partial M} P dx + Q dy = \iint_M \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx dy$

$$\int_{\partial M} \omega \qquad\qquad \int_M d\omega$$

Dem.: $d(\overbrace{Pdx + Qdy}^{\omega}) = \underbrace{+\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\wedge dy}_{= d\omega}$.

$\gamma : [a, L] \to \mathbb{R}^3$



ds : 1-forma ao longo de γ tal que $ds_{\gamma(t_0)}(v) = \|v\|_{\mathbb{R}^3}$

$\gamma^* ds = \alpha . dt$ para alguma funcão α.

se $t_0 \in [a,b]$ $\quad (\gamma^* ds)_{t_0} = \alpha(t_0)\, dt_{t_0} \Rightarrow$

$$ds_{\gamma(t_0)}(d\gamma_{t_0}(v)) = \alpha(t_0)\, dt_{t_0}(v) \ , \ \forall v \in T_{t_0}[a,b]$$

se $v = 1$ temos $ds_{\gamma(t_0)}(\underbrace{d\gamma_{t_0}(1)}_{=\,\gamma'(t_0)}) = \alpha(t_0)\, dt_{t_0}(1)$

$$\Rightarrow \alpha(t_0) = \|\gamma'(t_0)\| , \ \forall t_0 \in [a,b].$$

Logo $ds = \|\gamma'(t_0)\|\, dt$.

Daí vem que se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é contínua temos $\int_\gamma f . ds = \int_a^b f(\gamma(t)) . \|\gamma'(t)\| . dt$

Por outro lado, se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ~~é tal que~~ é curva e T é campo tangente tal que $ds_{\gamma(t)}(T) = 1$, $\forall t \in [a,b]$, ou seja $\|T\| = 1$ então ds_p é funcional linear em $T_p\gamma$ e então existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in T_p\gamma$ tal que $ds_p(v) = \langle (\alpha, \beta, \gamma), v \rangle$, $\forall v \in T_p\gamma$. Como $\dim T_p\gamma = 1 \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = \lambda T$

Mas ~~ds_p~~ $1 = ds_p(T) = \langle \lambda T, T \rangle = \lambda \langle T, T \rangle = \lambda$, logo $ds_p(v) = \langle T, v \rangle$.

②

Teorema (da divergência): Sejam $M^3 \subset \mathbb{R}^3$ variedade compacta e com bordo e n o campo normal unitário que aponta para fora em ∂M.
Se $F: M \to \mathbb{R}^3$ é campo de vetores diferenciável então

$$\int_M \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial M} \langle F, n \rangle \, dA.$$

$\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$ é uma função

$dy \wedge dz \wedge dx = -dy \wedge dx \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$

Dem.: Se $F = (F_1, F_2, F_3)$ defina $\omega = F_1 \, dy \wedge dz + F_2 \, dz \wedge dx + F_3 \, dx \wedge dy$
Então $d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = (\operatorname{div} F) \, dx \wedge dy \wedge dz.$

Se $n = (n_1, n_2, n_3)$ temos
$$n_1 \, dA = dy \wedge dz$$
$$n_2 \, dA = dz \wedge dx$$
$$n_3 \, dA = dx \wedge dy$$

Sobre ∂M temos que
$$\langle F, n \rangle dA = F_1 n_1 dA + F_2 n_2 dA + F_3 n_3 dA$$
$$= F_1 \, dy \wedge dz + F_2 \, dz \wedge dx + F_3 \, dx \wedge dy$$

Logo
$$\int_{\partial M} \langle F, n \rangle dA = \int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = \int_M (\operatorname{div} F) \, dx \wedge dy \wedge dz = \int_M \operatorname{div} F . \, dV. \quad \#$$

Teorema de Stokes: Sejam $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade compacta, com bordo e orientada e seja n o campo normal unitário que aponta para fora em M
Se ∂M tem a orientação induzida e T é o campo tangente a ∂M tal que $ds(T) = 1$ e $F: \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, Ω aberto e $M^2 \subset \Omega$, é um campo diferenciável, então

$$\int_M \langle \operatorname{rot} F, n \rangle dA = \int_{\partial M} \langle F, T \rangle ds,$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

ou $\iint_M \langle \operatorname{rot} F, n \rangle dA = \int_{\partial M} F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz$, se $F = (F_1, F_2, F_3)$

Dem.: $\omega = F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz \in \Omega^1(M)$. $\Rightarrow d\omega = F_{1_y} dx \wedge dy + F_{1_z} dx \wedge dz + F_{2_x} dy \wedge dx + F_{2_z} dy \wedge dz + F_{3_x} dz \wedge dx + F_{3_y} dz \wedge dy$

$$\operatorname{rot} F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \Longrightarrow \langle \operatorname{rot} F, n \rangle dA =$$
$$(F_{3y} - F_{2z}) dy \wedge dz + (F_{1z} - F_{3x}) dz \wedge dx$$
$$+ (F_{2x} - F_{1y}) \, dx \wedge dy = d\omega$$

③

$\frac{1}{}\, ds^{(T)} = \Gamma_1 \alpha\, dx^{(T)} + \beta\, dy + \gamma\, dz$ d

$\alpha \gamma' = \alpha v$

$ds_p(v) = \langle \gamma', v \rangle = \alpha$

$\langle z, \gamma' \rangle \cdot \overset{ds_p(v)}{\langle v, \gamma' \rangle} = \langle z, \gamma' \rangle \alpha = \langle z, v \rangle$

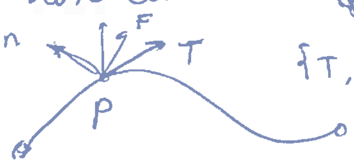
$= \alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma_3 T_3$

$T_p \partial M \subset T_p M \subset T_p \mathbb{R}^3$

$\{e_{1p}, e_{2p}, e_{3p}\}$ b.o.n positiva de $T_p\mathbb{R}^3$

tal que

$\{dx, dy, dz\}$ base dual de $\{e_{1p}, e_{2p}, e_{3p}\}$



$\{T, \eta, n\}$

$1 = ds_p(T) = \alpha_p \cdot T_1$. Logo, sobre ∂M

$ds_p(v_p) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$

$ds_p(\overset{v}{\ }) = \alpha_1 dx + \beta dy + \gamma dz$

$\gamma(t) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3$

$ds_p = T_1 dx + T_2 dy + T_3 dz$

$ds = \underbrace{\sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2}\, dt}$

$T_1\, ds_p(\alpha T) = \quad = ds(\alpha T) = \alpha\, ds(T) = \alpha$

$\gamma^*(ds) = \sqrt{\qquad}\; dt$

$ds_p(\alpha T) = \langle \gamma'(t), v \rangle \qquad v = \alpha T$

$ds_{(p)}(\gamma'(t)) = 1$

$= \langle T, v \rangle = T_1 dx + T_2 dy + T_3 dz = \alpha |T|$

Por outro lado, $ds_p(v) = \langle T, v\rangle$ (pois $ds_p(T) = 1$) e ③

$$\langle z,T\rangle \cdot \overbrace{\langle T, v\rangle}^{ds_p(v)} = \langle z,T\rangle\langle T, \alpha T\rangle = \langle z,T\rangle \alpha = \langle z, v\rangle$$

Fazendo $z = e_1 \Rightarrow T_1\, ds_p(v) = v_1 = dx(v_1)$

$\vdots$

E portanto, $\langle F,T\rangle ds = F_1 T_1 ds + F_2 T_2 ds + F_3 T_3 ds$

$$= F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \omega$$

Logo $\displaystyle\int_{\partial M} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz = \int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega = \int_M \langle \operatorname{rot} F, n\rangle dA$. #

Teorema de Stokes em dimensão 1: Seja $M^1 \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade compacta e orientada e ∂M orientada pela orientação induzida se $\partial M \neq \emptyset$.

Se $f \in \Omega^0(A)$, $M \subset A$, aberto de $\mathbb{R}^n$ então $\displaystyle\int_M df = \int_{\partial M} f$ se $\partial M \neq \emptyset$ e

$\displaystyle\int_M df = 0$ se $\partial M = \emptyset$.

Dem.: Suponha $\partial M = \emptyset$ e

$p \in M$, existe $c : [0,1] \to V$, $U \subset \mathbb{R}$ tq $c(t) = p$

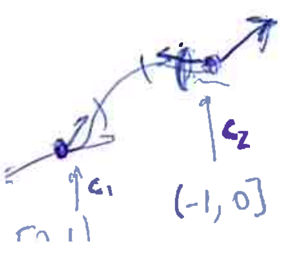
e $(\operatorname{supp} f) \cap M) \subset c([0,1])$ então

$$\int_M df = \int_{c([0,1])} df = \int_0^1 c^*(df) = \int_0^1 d(c^* f) \overset{T.F.C.}{=} \int_{\partial U} c^* f = \int_{c(\partial U)} f = 0,$$

$(f \circ c)'(t)\,dt$

$c(0) = c(1) \Rightarrow (f\circ c)\Big|_0^1 = 0.$

Se $\partial M \neq \emptyset$ então



$$\int_M df = \int_{-c_1} df + \int_{c_2} df = -\int_0^1 c_1^* df + \int_0^1 c_2^* df$$

$$= -f(c_1(0)) + f(c_2(1)) = \int_{\partial M} f.$$

<u>Teorema</u>: Seja $M^1 \subset \mathbb{R}^n$ variedade compacta e T campo tangente unitário. Se $f: A \to \mathbb{R}$ é C^∞ no aberto A, $M \subset A$ e $\partial M = \emptyset$ então

$$\int_M \langle \nabla f, T \rangle ds = 0.$$

Se $\partial M = \{x_1, \dots, x_m\}$ e $\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{se } T \text{ aponta para dentro de } M \text{ em } x_i \\ -1, & \text{se } T \text{ aponta para fora de } M \text{ " } x_i \end{cases}$

então $\displaystyle\int_M \langle \nabla f, T \rangle ds = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f(x_i)$.

Dem: df corresponde a ∇f (exercício da prova) e

$$\int_M df = \int_M \langle \nabla f, T \rangle ds$$

$$\|$$

$$\int_{\partial M} f = \begin{cases} 0, & \text{se } \partial M = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i f(x_i) \end{cases}$$