Indução segundo princípio

Exemplo:

Demostre que $4n < 2^n$ para todo $n \geq 5$.

sol:

Passo 1: na proposição $4 \cdot 5 < 2^5$ $[20 < 32]$ o qual é verdade.

Passo 2: Suponha que se cumpre para $n = k$, isto é,

$$4k < 2^k$$

Passo 3: verificar para $k+1$, com $k \geq 5$, temos

$$\begin{aligned}4(k+1) &= 4k + 4\\ &< 2^k + 4\\ &< 2^k + 4k \quad \text{pois } 4 < 4k\\ &< 2^k + 2^k\\ &= 2 \cdot 2^k\\ &= 2^{k+1}\end{aligned}$$

Exemplo:

$n < 2^n$ para todos os naturais n.

sol:

Paso 1. $1 < 2^1 = 2$.

Passo 2. Suponha que se cumpre para k, isto é,

$$k < 2^k$$

Passo 3: verificar para $k+1$

$$\begin{aligned}k+1 &< 2^k + 1\\ &< 2^k + 2^k\\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{k+1} &= 2(2^k)\\ &> 2k\end{aligned}$$

mas $2k = k + k > k+1$ para $k > 1$, logo,

$$2^{k+1} > 2k > k+1.$$

Exemplo:

Um cubo magico de ordem n é um cubo no que estão os números de 1 ate n^2 tal que a soma dos inteiros que estão em cada fila, colomna e diagonal é uma constante k, chamada constante magica. Prove que a constante magica de um cubo de ordem n é $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

exemplo:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

$K=15$

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

$K=34$

Temos que

$$S_n = 1+2+3+\dots+n^2$$

é a soma dos elementos do cubo mágico.

n	S_n
1	1
2	$1+2+3+4 = 10 = \frac{2^2(2^2+1)}{2} = \frac{4(4+1)}{2} = \frac{20}{2} = 10$
3	$1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45 = \frac{3^2(3^2+1)}{2} = \frac{9(10)}{2} = 45$

$$S_n = 1+2+\dots+n^2$$
$$S_n = n^2+(n^2-1)+\dots+1$$
$$2S_n = \underbrace{(n^2+1)+(n^2+1)+\dots+(n^2+1)}_{n^2}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

$S_3 = 1+2+\dots+3^2$

$S_4 = 1+2+\dots+3^2 + \overbrace{10+11+\dots16}$

$10+11+12+13+14+15+16$

$= S_3 +$

$[3^2+1]+[3^2+2]+[3^2+3]+[3^2+4]+[3^2+5]+[3^2+6]+[3^2+7]$

$\overbrace{4^2+17+\dots+25}$

$25+26+\dots+36$

7    $2n-1$

9

11

prova indução,

Passo 1 $n=1$, $S_1 = \frac{1(1^2+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Passo 2   suponha $n=k$, então

passo 3

$$S_{K+1} = 1+2+\dots+(K+1)^2$$
$$= 1+2+\dots+K^2+(K^2+1)+\dots+(K+1)^2$$
$$= \underbrace{1+2+\dots+K^2}+\dots+(K+1)^2$$
$$= S_K + (K^2+1)+\dots+(K+1)^2$$
$$= \frac{K^2(K^2+1)}{2} + K^2(2K+1) + \sum_{i=1}^{2K+1} i$$

$$= \frac{k^2(k^2+1)}{2} + k^2(2k+1) + \frac{(2k+1)(2k+2)}{2}$$

$$= \frac{k^2(k^2+1)}{2} + k^2(2k+1) + (2k+1)(k+1)$$

$$= \frac{k^2(k^2+1) + 2k^2(2k+1) + 2(2k+1)(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k^4 + k^2 + 4k^3 + 2k^2 + 2(2k^2 + 2k + k + 1)}{2}$$

$$= \frac{\cancel{k^4} + \cancel{k^2} + \cancel{4k^3} + 2\cancel{k^2} + 4k^2 + 6k + 2}{2}$$

$$= \frac{k^4 + 4k^3 + 7k^2 + 6k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)^2[(k+1)^2+1]}{2}$$

Logo temos que

$$nk = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \Rightarrow k = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

$\blacksquare$

Fibonacci

é definida como a sequencia

$$F(1) = 1$$
$$F(2) = 1$$
$$F(n+2) = F(n+1) + F(n)$$

os primeiros numeros são,

$$F(1) = 1$$
$$F(2) = 1$$
$$F(3) = F(2) + F(1) = 1 + 1 = 2$$
$$F(4) = F(3) + F(2) = 2 + 1 = 3$$
$$F(5) = F(4) + F(3) = 3 + 2 = 5$$
$$F(6) = F(5) + F(4) = 5 + 3 = 8$$
$$\vdots$$

Provar que

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = F(n+2) - 1 \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

Passo 1: $n = 1$ $\quad F(1) = F(3) - 1 = 2 - 1$ ✓

Passo 2:

$$\sum_{i=1}^{k} F(i) = F(k+2) - 1$$

Logo

$$\sum_{i=1}^{k+1} F(i) = \sum_{i=1}^{k} F(i) + F(k+1)$$

$$\overset{\text{Hipotese}}{=} F(k+2) - 1 + F(k+1) \rightarrow \text{definição}$$

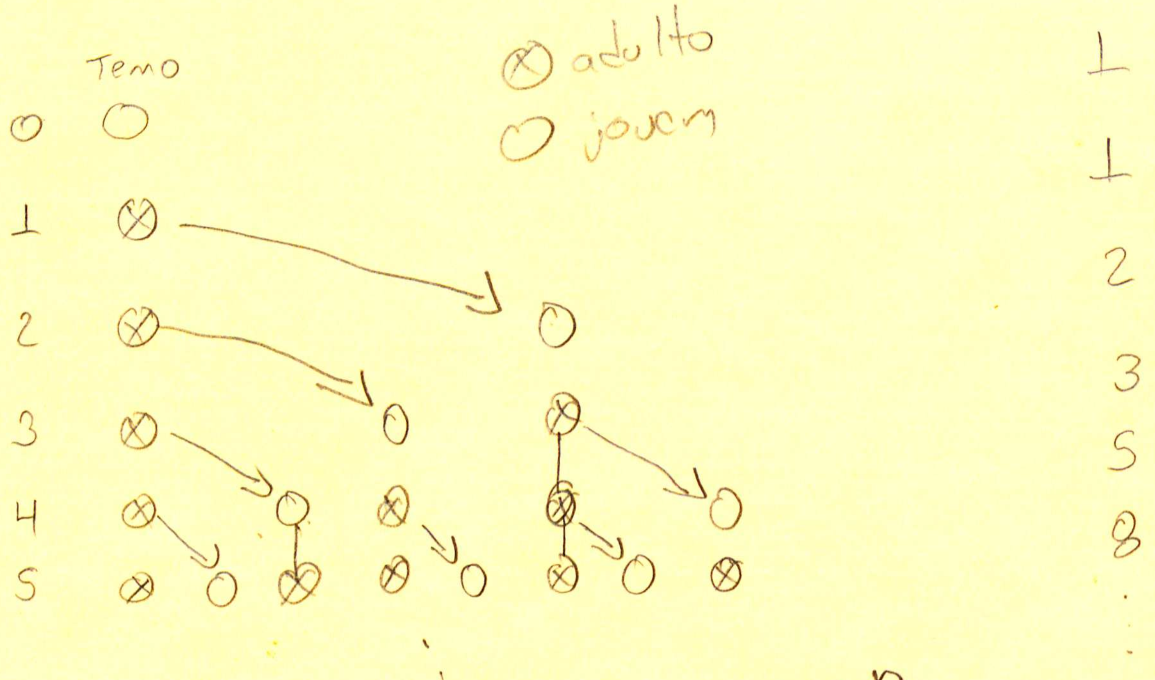
$$= F(k+2) + F(k+1) - 1$$

$$= F(k+3) - 1$$ ✓

Pode ser interpretado como

Um homem tem um par de coelhos em um ambiente fechado. Desejamos saber quantos pares de coelhos podem ser gerador deste par em um ano, se um modo natural a cada mês ocorre o nascimento [produção] de um par ~~de~~ e um par começa a produzir coelhos quando completa dois meses de vida.

Como o par adulto produz um par novo a cada 30 dias, no inicio do segundo mes existiram dois pares de coelhos, sendo um par adulto e outro jovem.



$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad n \geq 1$$

Passo 1

$$\begin{cases} n=1 & 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \\ n=2 & 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Passo 2

$$\begin{cases} F(k) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k \\ F(k+1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} \end{cases}$$

Sol:

Passo 1: $n=2$. a primeira pessoa é uma mulher e a ultima é um homem.

Passo 2: Suponha que para $n=k$ $(k \geq 2)$, na fila existe uma mulher na frente de um homem.

Passo 3: Vamos mostrar que quando $n=k+1$, na fila existe uma mulher na frente de um homem. De k para $k+1$ existe uma nova pessoa. Temos 3 cassos.

1) A nova pessoa esta na frente da mulher que esta na frente do homem.

2) A nova pessoa esta atras do homem que esta atras da mulher.

3) A nova pesso esta no medio da mulher e o homem que que estão proximo um do outro Neste casso, se a nova pessoa é mulher, ela esta na frente do homem; se a nova pessoa é um homem ele esta atras da mulher. Em ambos cassos ele esta na ~~frente~~ atras de uma mulher

Passo 3

$$F(K+2) = F(K+1) + F(K)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K+1} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K}\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K}\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{K}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{K}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}$$

note que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{2^2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1-\sqrt{5})^2}{2^2} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

$\square$

Exemplo:

Use indução para provar que se n pessoas estão em uma fila, onde n é um inteiro positivo, e se a primeira pessoa na fila é uma mulher e a última pessoa é um homem, então em algum lugar na fila há uma mulher diretamente na frente de um homem.