Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações
Lista 1

No dia 16 de janeiro você deve entregar os exercícios: .

1. Responda e justifique sua resposta.

   (a) Qual é o conjunto potência de $\emptyset$?

   (b) Qual é o conjunto potência de $\{\emptyset\}$?

   (c) Se A e B são dois conjuntos, $A \times B = B \times A$?

2. Prove as seguintes identidades de conjuntos (lembre que as notações A^c e $\overline{A}$ são equivalentes).

   (a) $A \backslash B = A \cap \overline{B}$;

   (b) $A \cup \emptyset = A$;

   (c) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

   (d) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

   (e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

   (f) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (lei de Morgan);

   (g) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (lei de Morgan).

3. Seja $A_i = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, i\}$, para $i = 1, \ldots, n$. Obter

   (a) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

   (b) $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$

4. Obter $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ e $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ se, para cada inteiro positivo i,

   (a) $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$;

   (b) $A_i = \{0, i\}$;

   (c) $A_i = \{-i, i\}$;

   (d) $A_i = \{-i, -i+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, i-1, i\}$.

5. Seja (A_n) uma sequência de conjuntos. Seja $E_0 = \emptyset$ e, para $n \in \mathbb{N}$, seja

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k, \qquad F_n = A_n \backslash E_{n-1}.$$

(a) Mostre que (E_n) é monótona crescente, isto é, $E_n \subseteq E_{n+1}$;

(b) Mostre que (F_n) é uma sequência de conjuntos disjuntos, isto é, $F_n \cap F_m = \emptyset$ se $n \neq m$.

(c) Mostre que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

6. Conjecture uma fórmula para cada uma das expressões e prove usando indução

   (a) $\sum_{i=1}^{n} i$;

   (b) $\sum_{i=0}^{n} 2^i$;

   (c) $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$;

   (d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$;

   (e) $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^n}$.

7. Prove usando indução

   (a) $2^n < n!$, para todo n, com $n \geq 4$;

   (b) $n^2 < \prod_{j=1}^{n} j$ para todo n, com $n \geq 4$;

   (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ para todo inteiro positivo n;

   (d) $\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$;

   (e) Para que n inteiro não-negativo $n^2 \leq n!$? Prove a sua resposta.

Os exercícios abaixo não deverão ser entregues na lista. Isto não significa que você não deve tentar resolve-los, eles fazem parte do conteúdo que será cobrado na prova.

8. Seja $(A_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de conjuntos. Defina

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_n, \qquad \liminf_{n\longrightarrow\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_n.$$

   Mostre que

   (a) $\limsup_{n\longrightarrow\infty} A_n$ corresponde a todos os x que pertencem a infinitos conjuntos A_n;

   (b) $\liminf_{n\longrightarrow\infty} A_n$ corresponde a todos os x que pertencem a cada A_n exceto para um número finito deles.

9. Conjecture uma fórmula para $\sum_{i=0}^{n} x^i$, em que x é um número real não-negativo e diferente de 1, e use o princípio de indução para estabelecer a conjectura.