Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações
Lista 2

Entrega: 23 de janeiro

Resolva os seguentes exercicios.

1. Responda
   (a) Quantas são as palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** esta mas não é a letra inicial?
   (b) Quantas são as palavras de 5 letras de um alfabeto de 26 letras nas quais a letra **A** esta mas não é a letra inicial?

2. Quantas são o número de soluções da equação
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$
   onde $x_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ são inteiros não negativos tais que
   (a) $x_i \geq 2$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$?
   (b) $0 \leq x_1 \leq 3$ e $1 \leq x_2 \leq 4$ e $x_3 \geq 15$

3. Prove usando um argumento combinatorio que
$$\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$$
   é um número inteiro.

4. Prove que se n e k são inteiros tais que $1 \leq k \leq n$, então
$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$
   (a) usando um argumento combinatorio.
   (b) usando uma prova algebrica baseada na expressão para $\binom{n}{r}$.

5. Mostre que $\binom{n}{k} \leq 2^n$ para todo inteiro positivo n e todo inteiro k com $0 \leq k \leq n$.

6. Mostre que (Teorema das diagonais)
$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

7. Uma pessoa tem 8 amigos, dos quais 5 serão convidados para uma festa.

(a) Quantas escolhas existem se dois dos amigos estiverem brigados e por esse motivo não puderem comparecer?

(b) Quantas escolhas existem se dois dos amigos puderam ir apenas se forem juntos?

8. Responda

   (a) De quantas maneiras diferentes 3 garotos e 3 garotas podem sentar-se em fila?

   (b) De quantas maneiras diferntes 3 garotos e 3 garotas podem sentar-se em fila se os garotos e as garotas sentarem-se juntos?

   (c) E se apenas os garotos sentarem-se juntos?

   (d) e se duas pessoas do mesmo sexo não puderem se sentar juntas?

Os exercícios abaixo não precisam ser entregues na lista. As pessoas que decidirem resolver e entregar ganharão no máximo 2 pontos de 10 pontos na primeira prova.

9. De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas en r urnas de forma que a i-ésima urna contenha pelo menos m_i bolas, para cada $i = 1, \ldots, r$ suponha que $n \geq \sum_{i=1}^{r} m_i$.

10. Verifique analiticcamente a igualdade a seguir

$$\binom{n}{2} = \binom{k}{2} + k(n-k) + \binom{n-k}{2}, 1 \leq k \leq n.$$

Agora, forneça um argumento combinatorio para esta identidade.