Conjuntos

Def: Um conjunto é uma coleção não ordenada de objetos. Os objetos que constituem um conjunto são chamados elementos do conjunto.

Escrevemos $a \in A$ para indicar que a é um elemento do conjunto A.

A notação $a \notin A$ indica que a não é um elemento do conjunto A.

obs: os conjuntos os representaremos com letras maiúsculas A, B, C, ... e seus elementos por letras minúsculas a, b, c, ...

Existem varias maneiras para descrever um conjunto.

- Listando os elementos (quando é possível)

  Exemplo:

  - $V = \{a, e, i, o, u\}$ conjunto das vogais
  - $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ conjunto de inteiros positivos impar menores que 10
  - $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$ conjunto de inteiros positivos menores a 100

- Propriedades dos elementos do conjunto.

  Caracterizamos os elementos no conjunto declarando a propriedade ou propriedades que devem ter para ser membros do conjunto

  Exemplo:

  * o conjunto de inteiros impares menores a 10

$$O = \{x \mid x \text{ é um impar inteiro menor que } 10\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \text{ é impar e } x < 10\}$$

Esta maneira de descrever um conjunto é util quando é impossível listar todos os elementos do conjunto.

Por exemplo $\mathbb{Q}^+$ o conjunto de todos os números racionais positivos pode ser escrito como

$$\mathbb{Q}^+ = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{p}{q} \text{ para alguns inteiros } p \text{ e } q \}$$

Notação

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ números naturais

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ números inteiros

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ números inteiros positivos

$\mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, \text{ e } q \neq 0 \}$ números racionais,

$\mathbb{R}$ conjunto dos reais

$\mathbb{R}^+$ conjunto reais positivos

* $\emptyset$ o conjunto vazio, conjunto que possui nehum elemento

Obs: Conjuntos podem ter outros conjuntos como membros.

Exemplo: $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$

Subconjuntos

Def: O conjunto A é um subconjunto de B se e somente se todo elemento de A também é um elemento de B. Usamos a notação $A \subseteq B$.

$[A \subseteq B$ sse $\forall a \in A \longrightarrow a \in B]$.

Obs: Para mostrar que A não é um subconjunto de B é necessário somente encontrar um elemento $x \in A$ tal que $x \notin B$.

Obs: Quando desejamos enfatizar que que um conjunto A é um subconjunto de B mas $A \neq B$, escrevemos $A \subset B$ [dizemos que A é subconjunto própio de B]

Obs: Para mostrar que dois conjuntos A e B são iguais, se deve mostrar que $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

~~o tamanho de um conjunto~~

Def: Seja S um conjunto. Se o conjunto S tem exactamente n elementos, quando n é um inteiro não-negativo, dizemos que S é finito e que tem cardinalidade n.
Denotamos a cardinalidade por $|S|$

Exemplo:

$|V| = 5$; $|O| = 5$; $|\{1, 2, \ldots, 100\}| = 100$

$|\phi| = 0$

Def: um conjuto é infinito se não é finito

Exemplo

$|\mathbb{Z}| = \infty$.

conjunto de potencias

Def: Dado um conjunto S, o conjunto potencia de S.
O conjunto potencia será denotado por $P(S)$. (ou 2^S)

exemplo:
Considere $S = \{0, 1, 2\}$.

$P(S) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}; \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$

obs: note que ϕ e S são membros deste conjuntos de conjuntos,

obs: Se um conjunto tem n elementos, então seu conjunto potencias tem 2^n elementos [mostraremos mas adiante]

Produto Cartesiano

Def: a n-tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é a coleção ordenada que tem a_1 como primeiro elemento, a_2 como segundo elemento, ..., e a_n como o n-ésimo elemento.

Obs: dois n-tuplas $(a_1, b_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ são iguais se e somente se $a_i = b_i$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Def: Seja A e B conjuntos. O produto cartesiano de A e B, denotado $A \times B$, é o conjunto de pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}$$

Exemplo:

$A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então

$$A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$$

Def: O produto cartesiano dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ denotado $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, é o conjunto de n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, onde $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Operações entre conjuntos

Def: Seja A e B conjuntos. A união dos conjuntos A e B, denotada $A \cup B$, é formado por os elementos que estão em A "ou" B, isto é, que pertencem ao pelo menos um dos conjuntos

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo:

$A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$ $\Rightarrow$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$

Def: Seja A e B conjuntos. A interseção dos conjuntos A e B, denotada $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A "e" ao conjunto B.

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Exemplo: (considere o anterior)

$$A \cap B = \{1, 3\}$$

Def: Dos conjuntos $A \cap B = \phi$

Def: Seja A e B conjuntos. A diferença de A e B, denotada $A \setminus B$, é o conjunto conformado pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

Def: Seja Ω o conjunto universal. O complemento de um conjunto A, denotado por $\bar{A}$ (A^c), é o complemento de A com relação a Ω.

$$A^c = \Omega \setminus A = \{x : x \notin A\}$$

Identidades de conjuntos

Exemplo:

- Prove que $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Prova:

Vamos a mostrar a igualdade mostrando que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$ e que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

* Primeiro provamos que $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$, para isto, vamos mostrar que se $x \in \overline{A \cap B}$ então $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$.

Suponha que $x \in \overline{A \cap B}$, então,

$x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \notin A \cap B$ (definição de complemento)

negação $\Rightarrow \neg(x \in A \cap B)$ (definição de não pertencer)

$\Rightarrow \neg(x \in A)$ ou $\neg(x \in B)$

$\Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$

$\Rightarrow x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

isto é, $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.

*Vamos mostrar agora que $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

Suponha que $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$,

$x \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B}$ (defi união)

$\Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$ (defi complementar)

$\Rightarrow \neg(x \in A)$ ou $\neg(x \in B)$

$\Rightarrow \neg(x \in A$ e $x \in B)$

$\Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$

~~Uniões e interseções~~ Gerais

- Dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sua união é

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para algum } i\}$$

- Dados n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sua interseção é

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i\}$$

Exemplo:

Para $i = 1, 2, \ldots$ seja $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$. Então

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}^+$$

e

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{n, n+1, \ldots\} = A_n$$

obs: podemos extender a notação anterior.

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_n$$

Mais geral se I é um conjunto

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \text{ existe } i \in I \text{ tal que } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}$$

Exemplo:

Seja $A_i = \{1, 2, 3, \ldots, i\}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{1, 2, \ldots, i\} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{Z}^+$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{1, 2, \ldots, i\} = \{1\}$$

Def: Seja A um conjunto não vazio. Uma partição de A é uma família de subconjuntos não vazios $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \phi$ se $i \neq j$.

Somatória

Somas como $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m$ podem ser escritos em forma compacta usando o símbolo somatória Σ.

$$\sum_{i=k}^{i=m} = \sum_{i=k}^{m} a_i = a_k + a_{k+1} + \cdots + a_m$$

Exemplo:

$$\sum_{j=-2}^{3} j^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + (1)^2 + (2)^2 + 3^2 = 19$$

Teorema:

Seja n um inteiro qualquer e c qualquer real, e $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ qualquer duas sequências de números. Então

- $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
- $\sum_{i=1}^{n} (ca_i) = c\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)$
- $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$
- $\sum_{i=0}^{n} a_{p-i} = \sum_{i=p-n}^{p} a_i$ *

Exemplos:

- $\sum_{i=1}^{3} 3(i+1) = 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + 3\cdot 4 = 3(2+3+4) = 3\sum_{i=1}^{3}(i+1)$
- $\sum_{i=2}^{5} 3 = 3+3+3+3 = 4\cdot 3$
- $\sum_{i=1}^{2} (2^i + 3^i) = 2+3+2^2+3^2 = \sum_{i=1}^{2} 2^i + \sum_{i=1}^{2} 3^i$
- $\sum_{i=0}^{4} a_{5-i} = a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = \sum_{i=1}^{5} a_i \quad \left[\begin{smallmatrix} n=5 \\ p=4 \end{smallmatrix}\right]$

~~Produtoria~~

Os produtos $a_k a_{k+1} \cdots a_m$ é denotado por $\prod_{i=k}^{m} a_i$

Exemplo:

O fatorial $n!$ é definido por $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$, onde $0! = 1$. Usando a notação produtoria

$$\prod_{k=1}^{n} k = n!$$

Propriedades

a) $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$

b) $\prod_{i=1}^{n} k = k^n$

c) $\prod_{i=1}^{n} k a_i = k^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

d) $\prod_{i=1}^{n} a_i^2 = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ [em geral $\prod_{i=1}^{n} a_i^k = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^k$]

Exemplo

a) $\prod_{i=1}^{3} i(i+1) = (1\cdot 2)(2\cdot 3)(3\cdot 4) = (1\cdot 2\cdot 3)(2\cdot 3\cdot 4)$

$= \left(\prod_{i=1}^{3} i\right)\left(\prod_{i=1}^{3} (i+1)\right)$

b) $\prod_{i=1}^{3} 3i = (3\cdot 1)(3\cdot 2)(3\cdot 3) = 3^3 \prod_{i=1}^{3} i$

c) $\prod_{i=1}^{4} (i+1)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = (2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)^2 = \left(\prod_{i=1}^{4} (i+1)\right)^2$

Princípio de indução matemática

O princípio de indução matemática é uma ferramenta valiosa para provar resultados envolvendo inteiros

Primeira forma do princípio da indução matemática

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa aos inteiros. Se

i) $P(n)$ é verdadeira para $n=1$ e

ii) $P(k)$ é verdadeira implica que $P(k+1)$ é verdadeira.

então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$

Os passos para aplicar a primeira forma do princípio indução matemática (PIM), devemos seguir os seguintes passos:

1) Passo inicial: verificar se $P(n)$ é verdadeira para $n=1$

2) Assumir $P(k)$ verdadeira, hipotese de indução, e provar que $P(k+1)$ é verdadeira

3) Sendo verificados 1) e 2), concluir que $P(n)$ é válida para qualquer valor $n \geq 1$

Exemplo:

Mostre que a soma dos cubos de três inteiros positivos consecutivos é um multiplo de 9.

Sol:

Vamos provar que $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$ é um multiplo de 9, para qualquer inteiro positivo n.

- Passo inicial.

Para $n=1$,

$$1^3+(1+1)^3+(1+2)^3=1+8+27=36=9\cdot4$$

que é multiplo de 9

- hipotese de indução:

$n=k$, $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3=9L$, onde L é um inteiro.

Devemos mostrar que

$$(k+1)^3+[(k+1)+1]^3+[(k+2)+1]^3=9M$$

para algum inteiro M.

$$(k+1)^3+[(k+1)+1]^3+[(k+2)+1]^3$$

$$=\underbrace{(k+1)^3+(k+2)^3+k^3}_{9L\text{ - Hipotese de indução}}+3\cdot k^2\cdot3+3k\cdot9+27$$

$$=9L+9k^2+9\cdot3k+9\cdot3=9[L+k^2+3k+3]$$

$$=9M$$

onde $M=L+k^2+3k+3$.

Exemplo:

Conjeture uma formula para a soma dos n primeiros inteiros impares e use indução para estabelecer a conjetura.

Sol:

As primeiras 5 somas, são tais que

$$1=1^2$$
$$1+3=4=2^2$$
$$1+3+5=9=3^2$$
$$1+3+5+7=16=4^2$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2$$

Assim a conjetura é

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

Agora provamos a conjetura por indução

- Quando $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 1 = 1^2$$

- Suponha que a formula se compre para $n=k$.

Consideremos a soma

$$\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) + [2(k+1)-1]$$

$$= k^2 + (2k+1)$$

$$= (k+1)^2$$

<u>Exemplo:</u>

Prove usando indução que para qualquer n natural.

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^m = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^m$$

<u>Prova:</u>

- se $n=1$, $\prod_{i=1}^{1} a_i^m = a_1^m = \left(\prod_{i=1}^{1} a_i\right)^m$
- Para $n=k$, a igualdade se verifica, isto é

$$\prod_{i=1}^{k} a_i^m = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^m$$

Logo

$$\prod_{i=1}^{k+1} a_i^m = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i^m\right)\left(\prod_{i=k+1}^{k+1} a_i^m\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right)^m a_{k+1}^m = \left[\left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right) a_{k+1}\right]^m$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k+1} a_i\right)^m$$

~~dos~~ Na primeira forma do princípio da indução como vimos nos exemplos referiam-se a sequências cujos n-ésimos termos poderiam ser calculados, a partir de n e do predecessor imediato na sequência.

- Existem outras situações nas quais é conveniente usar a "Segunda forma do princípio de indução matemática, descrita a seguir". Isto ocorre, quando por exemplo a sequência, acerca da qual deseja-se demonstrar alguma propriedade, é definida recursivamente de modo que o n-ésimo termo depende de dois ou mais termos anteriores.

Segunda forma do princípio de indução matemática

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa aos inteiros se

i) $P(n)$ é verdadeira para $n=1$ e

ii) $P(n)$ verdadeira para $1 \leq n \leq k$ implica que $P(k+1)$ é verdadeira.

então, $P(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Exemplo:

Definimos (recursivamente), para todo inteiro n, a função $u(n)$ por

$$u(1) = 1$$
$$u(2) = 5$$
$$u(n) = u(n-1) + 2u(n-2), \quad \forall n > 2.$$

Prove usando indução [2ª forma] que $u(n) = 2^n + (-1)^n$.

prova:

- Temos que $2^1 + (-1)^1 = 1 = u(1)$ e $2^2 + (-1)^2 = 5 = u(2)$ portanto $P(1)$ e $P(2)$ são verdadeiras.
- Supor que para todo inteiro n, tal que $2 < n \leq k$, a equação $u(n) = 2^n + (-1)^n$ é válida.

Devemos provar que a equação é válida para n=k+1.
temos que,

$$u(k+1) = u(k) + 2u(k-1) \quad \text{(def. de } u\text{)}$$
$$= 2^k + (-1)^k + 2[2^{k-1} + (-1)^{k-1}] \quad \text{(Hipótese indução)}$$
$$= 2 \cdot 2^k + (-1)^k + 2(-1)^{k-1}$$
$$= 2^{k+1} + (-1)^{k-1}(-1)^2$$
$$= 2^{k+1} + (-1)^{k+1}$$

o que comprova que, sendo $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ válidas, então, $P(k+1)$ também o é.

~~Número de subconjunto de um conjunto finito~~

Usando indução vamos mostrar que se S é um conjunto finito com n elementos, onde n é um inteiro não negativo, então, S tem 2^n subconjuntos.

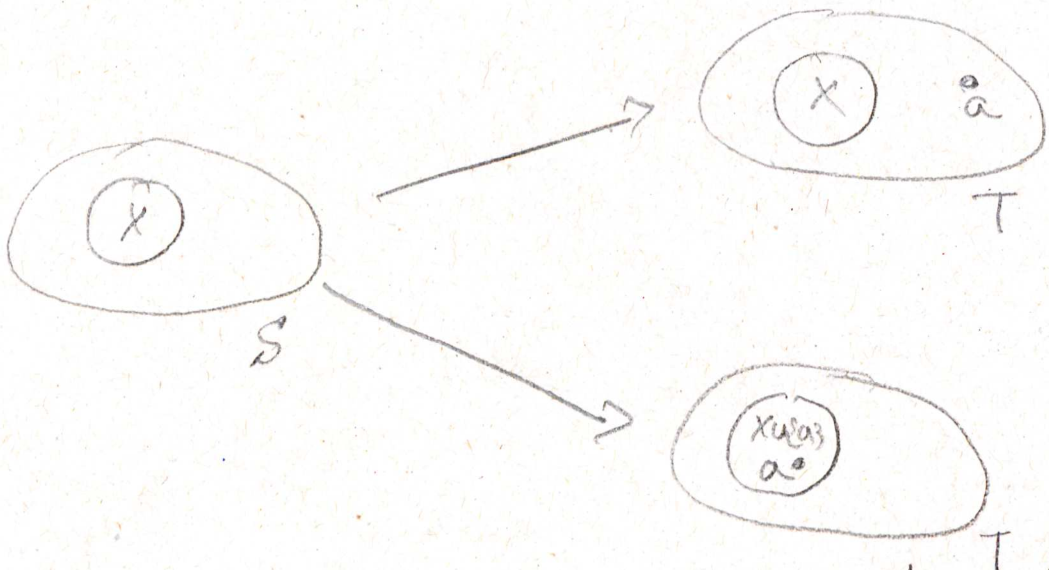
Prova: $P(n)$ proposição que um conjunto com n elementos tem 2^n subconjuntos

- Temos que $P(0)$ é verdade, de fato, o conjunto vazio, tem $2^0 = 1$ subconjuntos.
- Suponha que é verdade para $n=k$ para um k inteiro não-negativo arbitrário, isto é, todo conjunto com k elementos tem 2^k subconjuntos. Vamos mostrar que é verdad para $k+1$. Seja T um conjunto com $k+1$ elementos. Então, podemos escrever

$$T = S \cup \{a\}$$

onde a é um elemento de T e $S = T \setminus \{a\}$ [isto é $|S| = k$]. Os subconjuntos de T podem ser obtidos da seguinte forma.
Para cada subconjunto X de T existem dois subconjuntos de T,

$$X \quad e \quad X \cup \{a\}$$



Isto constituye todos os subconjuntos de T e são todos distintos. Vamos osar agora usar a hipotese de indução, S tem 2^k subconjuntos, pois tem k elementos. Também sabemos que existem 2 subconjuntos de T para cada subconjunto de S. Então, temos

$$2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

subconjuntos de T.