400

Princípio aditivo e multiplicativo

Def.: Se A e B são dois conjuntos disjuntos $(A \cap B = \emptyset)$ com, respectivamente, p e q elementos, então $A \cup B$ possui $p+q$ elementos.

Exemplo:
Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro e que Carlos tenha dinheiro para assistir a apenas 1 eventos. Quantos são os programas que Carlos pode fazer no sábado?

Sol:

$$A = \{x \mid x \text{ é filme}\} = \{F_1, F_2, F_3\}$$

$$B = \{y \mid y \text{ é peça teatro}\} = \{P_1, P_2\}$$

$A \cup B = \{x \mid x$ é um filme ou peça teatro$\}$.

logo

$|A| = 3$

$|B| = 2$ $\Rightarrow$ $|A \cup B| = 5$

Def: Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então, o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é m·n.

Em conjuntos se $|A| = m$ e $|B| = n \Rightarrow |A \times B| = m \cdot n$.

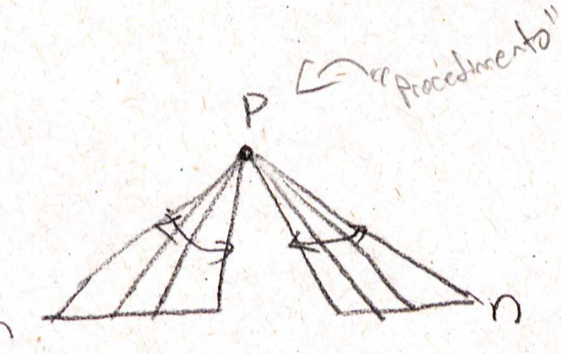
Exemplo:
No exemplo anterior, se Carlos tever dinheiro para assistir a um filme e a uma peça de teatro, quantos são os programas que ele pode fazer o sábado?

$$|A| = 3 \;, \; |B| = 2 \quad = \quad |A \cup B| = 6$$
$$A \cap B = \phi$$

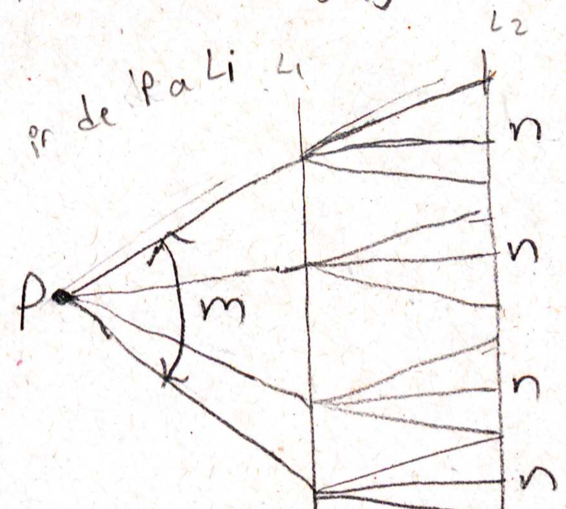
Obs: a regra aditiva e multiplicativa pode ser extendida.
Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos,

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \;, \quad \text{quando } A_i \cap A_j = \phi, \; i \neq j$$



Suponha que um procedimento designado com 1, pode ser feito de n maneiras. Suponha que um segundo procedimento designado como 2 pode ser feito de m maneiras. Suponha também que que 1 e 2 se realicem juntos. Então o número de maneiras que pode ser realizado 1 ou 2 é m+n



Um procedimento 1 pode ser realizado de m formas. Um procedimento 2 pode ser realizado de n formas. Suponha que cada uma das formas de efectuar 1 pode ser seguida por qualquer das formas de efectuar 2. Então o procedimento que consta de 1 seguido de 2 ... m·n.

Exemplos:

Um amigo mostrou-me 5 livros diferentes de matemática, 7 livros diferentes de física e 10 livros diferentes de química e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas formas eu posso escolhê-los?

Sol:

Posso fazer as seguintes escolhas

a) Mate e física: $5 \cdot 7 = 35$ maneiras

b) Mate e químicas: $5 \cdot 10 = 50$ maneiras

c) física e química: $7 \cdot 10 = 70$ maneiras

} princípio multiplicativo

Logo tenho

$$\underbrace{35 + 50 + 70}_{\text{princípio aditivo}} = 155 \text{ maneiras}$$

Exemplo:

Há 12 moças e 10 rapazes, onde 5 deles (3 moças e 2 rapazes) são filhos da mesma mãe e os restantes não possuem parentesco. Quantos são os casamentos possíveis.

Sol:

considerando as moças (3) que possuem irmãos (2) há:

$3 \cdot 8 = 24$ casamentos possíveis

considerando as moças (9) que não possuim irmãos, há $9 \cdot 10 = 90$ casamentos possíveis. Portanto

$24 + 90 = 114$ casamentos possíveis.

Exemplo:

Quantos são os números que podemos formar com os digitos 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2 e 3?

Sol:

Se primeiramente colocamos todos os digitos 1's, deixando um espaço entre eles, teremos

$$\_1\_1\_1\_1\_1\_1\_1\_$$

Podemos perceber que há 8 espaços nos quais podem ser colocados os digitos 2 e 3, supondo que o digito 2 seja colocado primeiro, como há 8 possibilidades para isso, vamos considerar uma dentre estas 8.

$$\_1\_2\_1\_1\_1\_1\_1\_1\_$$

Percebemos agora que há 9 espaços onde o digito 3 pode ser colocado. Portanto

$$8 \cdot 9 = 72$$

são os números formados com os 9 digitos.

Exemplo:
As placas dos automóveis são formadas por duas letras (K, Y e W inclusive) seguidas por quatro algarismos. Quantas placas podem ser formadas?

Sol:
Cada letra pode ser escolhida de 26 modos e cada algarismo de dez modos distintos. Logo

$$26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 6760000.$$

~~Permutações e Combinações~~

~~Def~~ uma permutação de um conjunto A é uma bijeção entre A e ele mesmo.

Se A é finito com n elementos, o número de permutações simples dos n objetos é P_n

$$P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$$

definimos $P_0 = 0! = 1$.

Exemplo:

$A = \{a, b, c\}$ a cadeia acb corresponde a bijeção

$a \mapsto a$; $b \mapsto c$; $c \mapsto b$.

Para determinar todas as permutações π de A, temos primeiro que decidir qual é a imagem $\pi(a)$ de a, e existem 3 posibilidades. Então, tenemos que decidir qual é a imagem $\pi(b)$ de b, existem duas posibilidades ~~do~~ conjunto $A \setminus \{\pi(a)\}$. Nesta etapa o conjunto $A \setminus \{\pi(a), \pi(b)\}$ tem um só elemento, e a única escolha para para c é tal elemento. obtemos, então $6 = 3 \cdot 2$ permutações:

abc, acb, bac, cab, bca, cba.

Portanto o metodo para encontrar todas as permutações de um conjunto A com n elementos é claro: primeiro mapeamos a_1 a qualquer dos n elementos de A, seja $\pi(a_1)$ tal elemento, e então aplicamos o mesmo processo aos conjuntos $A \setminus \{a_1\}$ e $A \setminus \{\pi(a_1)\}$, ambos de tamanho $n-1$. Neste casso note que surge um pequeno problema: originalmente tratamos com uma bijeção de A a ele mesmo, mas depois do primero passo, o domínio e rango de nossa função são generalmente diferentes. Para isso consideramos o seguente proposição.

Proposição 1: O número de permutações de um conjunto de n elementos é $n!$

Prova:

Provaremos que se A e B são qualquer dois conjuntos finitos com o mesmo cardinalidade n, então, o número de bijeçãos entre A e B é $n!$. Como caso especial temos $B = A$.

A prova é por indução. Para $n=0$, o conjunto vazio tem uma bijeção (la função vazio). Assim, existem $0! = 1$ permutações.

Assuma indutivamente que se A e B são dois conjuntos finitos da mesma cardinalidade n, então o número de bijeções entre A e B é $n!$.

Se A e B tem $n+1$ elementos, seja $a \in A$ e escreva $A = A' \cup \{a\}$, onde $A' = A \setminus \{a\}$ tem n elementos. Agora, qualquer bijeção

$$f: A \longrightarrow B$$

deve asignar algum elemento de b a a e então $f|_{A'}$ é uma bijeção entre A' e $B' = B \setminus \{f(a)\}$. Pela hipotese de indução existem $n!$ bijeções entre A' e B'. Portanto existem $n+1$ formas de escolher $f(a)$ em B, então o número total de bijeções entre A e B é $(n+1)\,n! = (n+1)!$.

<u>Exemplos:</u>

Considerando os algarismos $1, 2, 3, 4$ e 5 quantos número de 3 algarismos distintos podem ser formados?

<u>Sol:</u>

$$\begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \\ \square & \square & \square \end{array}$$

~~Pa~~ a primeira posição P_1 pode ser prenchida de 5 maneiras; a posição P_2 pode ser prenchida de 4 maneiras e a posição 3 pode ser prenchida de 3 maneiras. Portanto,

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

números de 3 algarismos diferentes formados com os digitos $1, 2, 3, 4, 5$.

Dado um conjunto X para qualquer subconjunto A de X, definimos a função característica de A, denotada χ_A (ou 1_A) como a função

$$1_A : X \longrightarrow \{0,1\}$$
$$x \longmapsto 1_A(x)$$

onde

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

conjunto potencia

Portanto obtemos a função $\chi : 2^X \longrightarrow \{0,1\}^X$ (função do conjunto potencia de X ao conjunto de funções características X a $\{0,1\}$), dada por

$$\chi(A) = \chi_A \;(1_A)$$

Tambem temos a função $\mathcal{S} : \{0,1\}^X \longrightarrow 2^X$, que mapea qualquer função caracteristica ao conjunto que é definido

$$\mathcal{S}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$$

Para toda função caracteristica, $f \in \{0,1\}^X$.

Proposição 2: Para qualquer conjunto X a função $\chi : 2^X \longrightarrow \{0,1\}^X$ do conjunto potencia ao conjunto de funções caracteristicas sobre X é uma bijeção cuja inversa é $\mathcal{S} : \{0,1\}^X \longrightarrow 2^X$.

Prova:

Já que $\chi \circ \mathcal{S} = Id$ e $\mathcal{S} \circ \chi = id$. $\boxtimes$

11

~~Proposição 3:~~
Se A e B são conjuntos finitos com $|A|=m$ e $|B|=n$, então, o conjunto de funções B^A de A a B tem n^m elementos.

Prova:
Exercício: Dica: rever o razocínio da proposição 1 ~~anterior~~.

~~Corolário:~~ Para qualquer conjunto finito A, se $|A|=n$, então $|2^A|=2^n$.

Prova:
Pela proposição 2, existe uma bijeção entre 2^A e o conjunto de funções $\{0,1\}^A$. Já que $|\{0,1\}|=2$, temos que $|2^A|=|\{0,1\}^A|=2^n$, pela proposição 3 (anterior).

Exemplo:
Quantos são os anagramas da palavra "PRÁTICO" que começam e terminam com consoante?

Sol:
A consoante inicial pode ser escolhida de 4 maneiras, a consoante final de 3 e as 5 letras restantes podem ser arrumadas entre essas duas consoantes de $P_5 = 5!$ maneiras. Logo,

$$4 \times 3 \times 5! = 1440$$

Exemplo:
De quantos modos 5 rapazes e 5 moças podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um rapaz e uma moça?

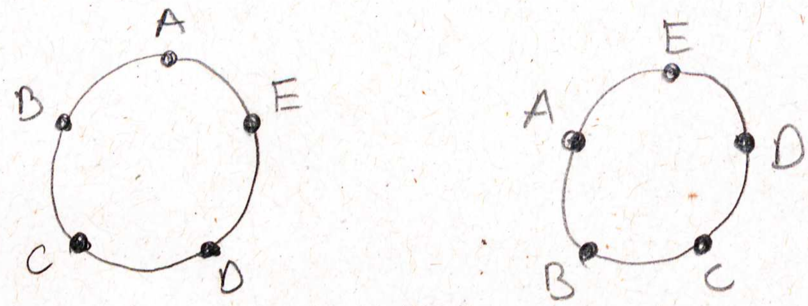
Sol:

o primeiro rapaz pode escolher seu lugar de 10 modos, o segundo de 8 modos, o terceiro de 6 modos, o quarto de 4 modos e o quinto de 2 modos. Colocamos os rapazes, temos que colocar as moças nos 5 lugares que sobraram o que pode ser feito de 5! modos, logo

$$10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = 460800$$

Exemplo:

De quantos modos podemos formar uma roda com 5 crianças?



Sol:

A primeira vista parece que para formar uma roda com as cinco crianças basta escolher uma ordem para elas, o que pode ser feito de $5! = 120$ modos. Mas note que as rodas ABCDE e EABCD são iguais, pois na roda o que importa é a posição relativa das crianças entre si e a roda ABCDE pode ser virada na roda EABCD. Como cada roda pode ser virada de cinco modos, a nossa contagem de 120 rodas contou cada roda 5 vezes e portanto a resposta é $120/5 = 24$.

Def: ~~(regra da divisão)~~ realizar uma tarefa si se existem n/d modos de realizar uma tarefa si se pode fazer usando um procedimento que se pode fazer de n modos e para cada um dos modos w, exactamente d dos n modos correspondem ao modo w.

~~obs:~~ a regra anterior pode ser escrita como

- Se um conjunto finito A é a união de n pares disjuntos de conjuntos cada um com d elementos, então $n = \frac{|A|}{d}$
- Se f é uma função de A a B onde A e B são finitos conjuntos, e se para cada valor $y \in B$ existem exactamente d valores $x \in A$ tais que $f(x) = y$, então $|B| = \frac{|A|}{d}$.

Exemplo:

De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de 4 pessoas cada?

Sol:

A divisão pode ser feita colocando as 8 pessoas em fila e dividindo-as de modo que um dos grupos seja formado pelas 4 primeiras pessoas e o outro pelas 4 ultimas. Como há 8! modos de colocar as pessoas em fila, a resposta parece ser 8!.

Entretento considerando a divisão

abcd/efgh

ela é identica à divisão

efgh/abcd.

Não obstanste, na contagem 8!, cada divisão foi contada como se fosse distinta. Além disso, divisões como abcd/efgh e cadb/efgh que diferem pela ordem dos elementos em cada grupo, a pesar de idênticas foram contadas como se fossem distintas. Cada divisão foi contada

$$\underbrace{(2)}_{\text{orden dos grupos}}\underbrace{(4!)}_{\text{ordem dos elementos 1ro grupo}}\underbrace{(4!)}_{\text{orden dos elementos 2do grupo.}} \text{ vezes}$$

Logo, se contamos 8! divisões e cada divisão foi contada (2)(4!)(4!) vezes, o número de divisões é

$$\frac{8!}{(2)(4!)(4!)} = 35.$$

Exemplos:

Quantos são os divisores do número 126.000?

Sol:

Factorando o número $N = 126000$, obtemos

$$N = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$$

Note que os divisores de N:

1) o exponente do fator 2 pode variar de 0 a 4
$$(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4)$$

2) O exponente do fator 3 pode variar do 0 a 2
$$(3^0, 3^1, 3^2)$$

3) O exponente do fator 5 pode variar do 0 a 3
$$(5^0, 5^1, 5^2, 5^3)$$

4) O exponente do fator 7 pode variar de 0 a 1
$$(7^0, 7^1)$$

Então, representando os divisores de N da forma $D = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^w$, podemos dizer

1) $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, isto é, 5 posibilidades para x

2) $y \in \{0, 1, 2\}$, isto é, 3 posibilidades para y

3) $z \in \{0, 1, 2, 3\}$, isto é, 4 posibilidades para z

4) $w \in \{0, 1\}$, isto é, 2 posibilidades para w

Logo, pelo principio multiplicativo

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \text{ divisores de } N.$$

Arranjos simples (r - permutação)

Um arranjo simples de n elementos tomados r a r, onde $n \geq 1$ e $r \leq n$ $r \in \mathbb{N}$, são todos os grupos de p elementos distintos, que diferem entre se pela ordem e pela natureza dos p elementos que compõem cada grupo. Notação A_n^r.

Teorema:
Se n é um inteiro positivo e r é um inteiro $1 \leq r \leq n$, então, existem

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

r-permutações de um conjunto com n elementos.

Prova:
Vamos a usar a regra do produto para provar isto.
O primeiro elemento da permutação pode ser escolhido em n modos porque existem n elementos no conjunto. Há $n-1$ modos de escolher o segundo elemento da permutação, porque há $n-1$ elementos depois de selecionar o objeto da primeira posição. Logo, existem $n-2$ modos de escolher o terceiro elemento, ..., e razoando do mesmo modo até ter $n-(r-1) = n-r+1$ modos de escolher o r-ésimo elemento. Logo, pela regra do produto temos

$$n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

r-permutações do conjunto.

Corolario: Se n e r são inteiros tais que $0 \leq r \leq n$, então

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Prova:
Temos que

$$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = [n(n-1)\cdots(n-r+1)]\frac{[(n-r)(n-r-1)\cdots 2\cdot 1]}{(n-r)(n-r+1)\cdots 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

Exemplo:

Quantos anagramas de 2 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?

Sol:

$$A_{23}^{2} = \frac{23!}{(23-2)!} = \frac{23!}{21!} = 23 \cdot 22 = 506.$$

outra forma: a primeira letra pode ser escolhada de 23 modos, e como as letras devem ser diferentes restam 22 posibilidades para escolher a segunda, portanto há $23 \cdot 22 = 506$ anagramas de duas letras diferentes.

Exemplo:

Quantos inteiros entre 1000 e 9999 têm digitos distintos e

a) são números pares?

b) Consistem inteiramente de digitos impares?

Sol:

Os números procurados são de 4 digitos, ou, de forma equivalente, podemos pensar em 4 posições a ser prenchidas

$$\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \overline{P_3} \quad \overline{P_4}$$

a) Para um número ser par a ultima posição tem que ser 0, 2, 4, 6 ou 8.

a.1) Numeros pares terminados em 0

$$\overline{P_1} \quad \overline{P_2} \quad \overline{P_3} \quad \overset{0}{\overline{P_4}}$$

digitos disponiveis: 1, 2, 3, 4, .., 9.

Prenchomento das 3 posições $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$

a.2) Numeros pares terminados em 2, 4, 6 ou 8.

- Prenchimento de P_4 = 4 modos
- Prenchimento de P_1 = 8 modos (todos os digitos, com exceção de 0 e o digito colocado em P_4)
- Prenchimento de P_2 e P_4 = A_8^2 maneiras

Pelo princípio multiplicativo há

$$4 \cdot 8 \cdot A_8^2 = 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 1792$$

números pares que não terminam em zero

Logo a resposta para o item a) é

$$A_9^3 + 4 \cdot 8 \cdot A_8^2 = 9 \cdot 8 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7$$
$$= 2296$$

números pares entre 1000 e 9999.

b) Se os números são constituídos de dígitos ímpares, então são formados pelos dígitos 1, 3, 5, 7, 9

Portanto há

$$A_5^4 = 5! = 120$$

números entre 1000 e 9999 formados de dígitos ímpares.

Exemplo:

Quantas permutações das letras ABCDEFGH contem a cadeia ABC?

Sol:

Já que as letras ABC devem ocorrer em uma cadeia, podemos achar a resposta se encontrarmos o número de permutações de 6 elementos, isto é

$6! = 720$ permutações

das letras ABCDEFGH que contem ABC incluso como cadeia (bloco).

§ Combinações §

Uma r-combinação de elementos de um conjunto é uma seleção não-ordenada de r elementos do conjunto. Em outras palavras, uma r-combinação é simplesmente um subconjunto de um conjunto com r elementos.

Exemplo:

Seja $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Então $\{1, 3, 4\}$ é uma 3-combinação do conjunto S (Note que $\{4, 1, 3\}$ é a mesma 3-combinação que $\{1, 3, 4\}$, porque a ordem em que os elementos do conjunto são listados não importa).

Notação: o número de r combinações de um conjunto com n diferentes elementos é denotado por

$$C_n^r$$

tambem é denotado $\binom{n}{r}$ e é chamado de coeficiente binomial.

Exemplo:

Consideramos o conjunto $X=\{1,2,3\}$, um conjunto de cardinalidade 3, então o conjunto vazio é o único subconjunto de tamanho 0, existem 3 subconjuntos de tamanho 1

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}$$

3 subconjuntos de tamanho 2

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$$

e um subconjunto de tamanho 3.

Exemplo:

Considere $X=\{1,2,3,4\}$. De novo o conjunto vazio é o único conjunto de tamanho 0, e X é o único conjunto de tamanho 4. Temos tambem 4 subconjuntos de tamanho 1,

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}.$$

6 subconjuntos de tamanho 2,

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,4\}$$

e 4 subconjuntos de tamanho 3,

$$\{2,3,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,4\}, \{1,2,3\}$$

Note que os subconjuntos de tamanho 3 são uma bijeção entre os conjuntos de tamanho 1, já que todo conjunto de tamanho 3 é o complemento de conjuntos de tamanho 1.

Em geral é verdade:

"O número de subconjuntos com k elementos é igual ao número de subconjuntos com $n-k$ elementos".

Proposição:

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $k \in \mathbb{Z}$, se $\binom{n}{k}$ denota o número de subconjuntos de cardinalidade k de um conjunto de cardinalidade n, então,

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{se } k \notin \{0,1,\dots,n\}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (n \geq 1,\ 0 \leq k \leq n)$$

Prova:

- Claramente quando $k \notin \{0,1,\dots,n\}$, temos que
$$\binom{n}{k} = 0$$

- Temos também que
$$\binom{0}{0} = 1$$
pois o conjunto vazio é o único subconjunto de tamanho 0

- Se $n \geq 1$, tenemos que considerar os casos $k=0$ e $k=n$ separadamente. Se $k=0$, então o único conjunto de $\{1,2,\dots,n\}$ é o conjunto vazio, assim

$$\binom{n}{0} = 1 = \underbrace{\binom{n-1}{0}}_{=1} + \underbrace{\binom{n-1}{-1}}_{=0} = 1+0$$

Se $k=n$, então o único subconjunto de $\{1,\dots,n\}$ com n elementos é $\{1,2,\dots,n\}$, assim

$$\binom{n}{n} = 1 = \underbrace{\binom{n-1}{n}}_{=0} + \underbrace{\binom{n-1}{n-1}}_{=1} = 0+1$$

• Se $1 \le k \le n-1$, então existem dois tipos de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ tendo k elementos: aqueles que contem n e aqueles que não contem n.

Existem tantos subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ contendo n como subconjuntos de $k-1$ elementos de $\{1, \dots, n-1\}$, chamados $\binom{n-1}{k-1}$, e existem tantos subconjuntos de k elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ não contendo n como subconjuntos de k elementos elementos de $\{1, \dots, n-1\}$, chamado $\binom{n-1}{k}$.

Então, o número de subconjuntos de $\{1, 2, \dots, n\}$ consistente de k elementos elementos é

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

que é igual a $\binom{n}{k}$ $\blacksquare$

A formula anterior é chamada a formula de Pascal

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \overset{1}{\binom{0}{0}} & & & & \\
 & & & \overset{1}{\binom{1}{0}} & & \overset{1}{\binom{1}{1}} & & & \\
 & & \overset{1}{\binom{2}{0}} & & \overset{2}{\binom{2}{1}} & & \overset{1}{\binom{2}{2}} & & \\
 & \overset{1}{\binom{3}{0}} & & \overset{3}{\binom{3}{1}} & & \overset{3}{\binom{3}{2}} & & \overset{1}{\binom{3}{3}} & \\
\overset{1}{\binom{4}{0}} & & \overset{4}{\binom{4}{1}} & & \overset{6}{\binom{4}{2}} & & \overset{4}{\binom{4}{3}} & & \overset{1}{\binom{4}{4}} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Exemplo:

$$\binom{4}{1} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} \quad ; \quad \binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}$$

Proposição:
Para todo $n, k \in \mathbb{N}$ com $0 \leq k \leq n$, temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Prova:
Por indução sobre n.
- Para $n=0$, já que $0 \leq k \leq n$, temos que $k=0$, logo

$$\binom{0}{0} = 1$$

e já que $0! = 1$, temos

$$\frac{0!}{0!\,0!} = 1$$

- Hipotese de indução, se cumpre para $n-1$. Logo pela fomula de Pascal.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-k)}{n-k} \cdot \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k}{k}$$

$$= \left(\frac{(n-k)}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{k}{k(k-1)!(n-k)!} \right)(n-1)!$$

$$= \left(\frac{(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{k}{k!(n-k)!} \right)(n-1)!$$

$$= \frac{n}{k!(n-k)!}(n-1)! = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\square$

Exemplos:

Quantos são os anagramas formados por 2 vogais e 3 consoantes escolhidas dentre 18 consoantes e 5 vogais.

Sol:

A escolha das vogais pode se dar de C_5^2 maneiras diferentes. A escolha das consoantes pode se dar de C_{18}^3 maneiras diferentes. Portanto o número de anagramas é

$$C_5^2 \cdot C_{18}^3 = \left(\frac{5!}{2!\,3!}\right)\left(\frac{18!}{3!\,15!}\right) = 979\,200$$

Obs:

Por simetria temos que

$$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

chamada C_n^{n-k} combinação complementar. Isto é se consideramos um conjunto de n elementos distintos, o número de maneiras de escolher k objetos é idêntico ao número de maneiras de escolher $n-k$ objetos, pois dos n objetos tiramos k, sobram $(n-k)$ e consequentemente, se de n objetos tiramos $n-k$, sobram k.

Exemplos.

Quantas diagonais possui um polígono regular de n lados?

Sol.:

Seja $P_1, P_2, \ldots, P_n$ os vértices. Mas para cada i P_i pode ser ligado com $(n-3)$ vértices (os outros dois sejam lados do polígono). O número de maneiras de traçarmos estas diagonais é escolher 1 entre os vértices $(n-3)$ restantes, isto é

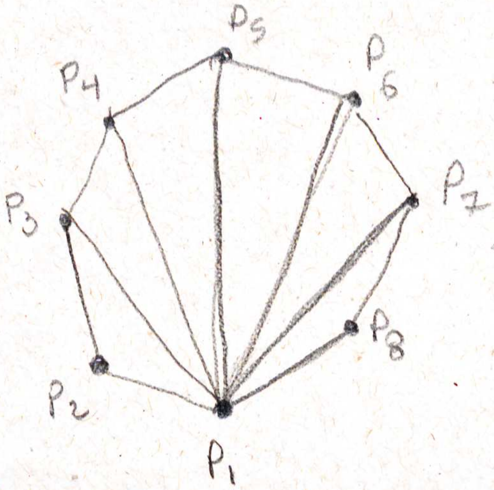
$$C_{n-3}^1$$

Como há n vértices e cada um deles há C^{1}_{n-3} diagonais possíveis, então

$$n C^{1}_{n-3}$$

deveria ser o número de diagonais do polígono. Mas neste casso estamos considerando a diagonal entre os vertices P_i e P_j duas vezes, sendo uma delas quando o vértice conciderado o P_i e outra quando o vértice considerado é P_j. Logo, devemos dividir este resultado por 2, então,

$$\frac{n C^{1}_{n-3}}{2} = \frac{n}{2}\frac{(n-3)!}{1!(n-4)!} = \frac{n(n-3)}{2} \text{ diagonais}$$



exemplo

<u>Exemplo:</u>

De quantas maneiras pode-se escolher 3 números distintos do conjunto $A=\{1,2,3,\ldots,50\}$ de modo que sua soma seja um multiplo de 3?

<u>Sol:</u>

Sejam

$A_1 = \{x \in A : x = 3k,\ k = 1,2,\ldots\} = \{3,6,9,\ldots,48\}$

$A_2 = \{x \in A : x = 3k+1,\ k = 0,1,2,\ldots\} = \{1,4,7,10,\ldots,49\}$

$A_3 = \{x \in A : x = 3k+2,\ k = 0,1,2,\ldots\} = \{2,5,8,11,\ldots,50\}$

Logo $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, e

$|A_1| = 16$

$|A_2| = 17$

$|A_3| = 17$

• se $x, y, z \in A_1$, então

$$x+y+z = 3k + 3k' + 3k'' = 3(k+k'+k'')$$

que é multiplo de 3, isto é, se somamos 3 números distintos de A_1 eles serão multiplos de 3. Isto pode ser feito de

$$C_{16}^{3} = \frac{16!}{3!13!} = 560 \text{ modos}$$

• se $x, y, z \in A_2$, então

$$x+y+z = (3k'+1) + (3k''+1) + (3k+1)$$
$$= 3(k+k'+k'') + 3$$
$$= 3(k+k'+k''+1)$$

que é multiplo de 3. Isto pode ser feito de

$$C_{17}^{3} = \frac{17!}{3!14!} = 680 \text{ modos}$$

• se $x, y, z \in A_3$, então,

$$x+y+z = (3k'+2) + (3k''+2) + (3k+2)$$
$$= 3(k'+k''+k) + 6$$
$$= 3(k'+k''+k+2)$$

que é multiplo de 3. Isto é feito de

$$C_{17}^{3} = \frac{17!}{3!14!} = 680 \text{ modos}$$

• Se $x \in A_1$, $y \in A_2$ e $z \in A_3$, então,

$$x+y+z = 3k + (3k'+1) + (3k''+2)$$
$$= 3(k+k'+k''+1)$$

que é multiplo de 3, isto pode ser feito de

$$C_{16}^{1} \cdot C_{17}^{1} \cdot C_{17}^{1} = 16 \cdot 17 \cdot 17 = 4624$$

Logo, podemos escolher 3 números distintos de A, de modo de obter um multiplo de 3 de

$$C_{16}^{3} + C_{17}^{3} + C_{17}^{3} + C_{16}^{1} \cdot C_{17}^{1} \cdot C_{17}^{1} = 6544 \text{ maneiras}$$

Prova combinatória

Uma prova combinatória de uma identidade é uma prova que usa argumentos de contagem para provar que ambos lados da identidade conta os mesmos objetos mas de diferentes maneiras ou uma prova que é basada em mostrar que existe uma bijeção entre os conjuntos de objetos contados nos dois lados da igualdade.

Equações lineares com coeficientes unitários

Vamos a contar o número de soluções inteiras de uma equação da forma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \quad , \quad x_i, m \in \mathbb{Z} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Teorema: O número de soluções em inteiros positivos da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = m \qquad \text{para } m > 0$$

é dado por C_{m-1}^{r-1}.

Prova:
Como estamos interesados em expressar o inteiro positivo m como soma de r inteiros positivos, basta, escrever m como a soma de 1's, e colocamos r-1 barras divisoras entre os m 1's,

$$1 + 1 + | + + 1 + \cdots + 1 \,| + \cdots + | + 1 + \cdots + 1 = m$$

o valor de x_1 será o número de 1's que acontecem a primeira barra, o valor de x_2, o número de 1's entre a primeira e segunda barra, e assim por diante, até obtermos o valor de x_r como sendo o número de 1's à direita da barra número $(r-1)$. Como cada possível distribuição das barras corresponde uma única solução da equação, basta contarmos de quantas formas isto pode ser feito. Devemos escolher $r-1$ dos $m-1$ possíveis locais (os signos "+" que separam os 1's) para a colocação das barras divisoras, o que pode ser feito de C_{m-1}^{n-1} ☒

Teorema:
O número de soluções não-negativas inteiras da equação
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m \qquad \text{para } x_i \geq 0$$
é
$$C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m}$$

Prova:
Somando um a cada x_i, obtemos
$$(x_1+1) + (x_2+1) + \cdots + (x_n+1) = m+n$$
Seja $y_i = x_i + 1$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, então,
$$* \quad y_1 + y_2 + \cdots + y_n = m+n \qquad \text{para } y_i \geq 1$$
Então o problema é equivalente a determinar o número de soluções inteiras positivas de $*$, que pelo teorema anterior é
$$C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m}$$ ☒

Exemplo:
Encontrar o número de soluções em inteiros positivos maiores do que 3 da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, isto é, determinar o número de soluções inteiras de $x_1 + x_2 + x_3 = 17$ onde $x_i > 3$ para $i = 1, 2, 3$.

Sol:
subtraindo 3 a cada x_i, obtemos
$$* \quad y_1 + y_2 + y_3 = 13 \qquad \text{onde } y_i = x_i - 3, \; i = 1, 2, 3.$$
Como a solução número em inteiros positivos do $*$ é $C_7^2 = 21$, este é o número procurado.

Exemplo:

Encontrar o número de soluções em inteiros positivos da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, onde $x_2 > 5$.

Sol:

Fazendo

$$y_1 + y_2 + y_3 = 15$$

onde $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - 5$, $y_3 = x_3$, temos que o número de soluções é

$$C_{14}^{2} = \binom{14}{2}.$$