Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações
Lista 3

Gabarito

Resolva os seguentes exercicios.

1. Quantas soluções existem da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

nas quais k dos x_i são iguais a 0.

Sol:
Para encontrar o número de soluções da equação onde k dos x_r's são zero, podemos escolher k dos x_i's serem zero in $\binom{n}{k}$ maneiras e contar o número de soluções possiveís em inteiros positivos, para as $r-k$ variaveis restantes. O número de soluções para a equação restante é $\binom{n-1}{r-k-1}$ maneiras, portanto, o número total de soluções é (principio multiplicativo)

$$\binom{r}{k}\binom{n-1}{r-k-1}$$

.

2. De quantos modos n casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?

Sol:
Considere os casais C_i's para $i = 1, 2, \ldots, n$ e definamos

$A =$ o conjunto das permutações circulares das $2n$ pessoas.

e para $i = 1, 2, \ldots, n$ os conjuntos

$A_i =$ o conjunto das permutações circulares das $2n$ pessoas nas quais os componentes do i-ésimo casal estejem juntos.

A quantidade procurada é $\left|\bigcap_{k=n}^{n} A_i^c\right|$. Más,

$$\begin{aligned}
|A| &= (2n-1)! \\
|A_i| &= 2 \cdot (2n-1-1)! \\
|A_{i_1} \cap A_{i_2}| &= 2^2 \cdot (2n-1-2)! \\
|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| &= 2^3 \cdot (2n-1-3)! \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| &= 2^n \cdot (2n-1-n)!
\end{aligned}$$

Portanto, pelo principio de inclusão-exclusão

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcap_{k=n}^{n} A_i^c\right| &= (2n-1-1)! - \binom{n}{1}2(2n-1-1)! + \binom{n}{2}2^2(2n-1-2)! - \\
&\quad \cdots + (-1)^n 2^n (2n-1-n)! \\
&= (2n-1)! + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i 2^i (2n-1-i)!.
\end{aligned}
$$

3. Encontre o número de permutações de $\{1,2,3,4,5,6\}$ nas quais nenhuma das subsequências a seguir ocorrem: 134 e 56.

   Sol:
   Considere

   $$A = \text{o conjunto das permutações do conjunto } \{1,2,3,4,5,6\}.$$

   e para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ os conjuntos

   $$
   \begin{gathered}
   A_{134} = \text{o conjunto das permutações do conjunto } \{1,2,3,4,6\} \text{ tal que o padrão 134} \\
   \text{ocorre.} \\
   A_{56} = \text{o conjunto das permutações do conjunto } \{1,2,3,4,6\} \text{ tal que o padrão 56} \\
   \text{ocorre.}
   \end{gathered}
   $$

   A quantidade desejada é $|A_{134}^c \cap A_{56}^c|$, mas

   $$
   \begin{aligned}
   |A| &= 6! \\
   |A_{134}| &= 4! \\
   |A_{56}| &= 5! \\
   |A_{134} \cap A_{56}| &= 3!.
   \end{aligned}
   $$

   Portanto, pelo principio da inclusão-exclusão

   $$
   \begin{aligned}
   |A_{134}^c \cap A_{56}^c| &= |A| - |A_{134}| - |A_{56}| + |A_{134} \cap A_{56}| \\
   &= 6! - 4! - 5! + 3! \\
   &= 582.
   \end{aligned}
   $$

4. Se tem n estudantes caminhando em linha, de modo que cada menino exceto o primeiro é precedido por outro, ou seja, em fila única. Para que a mesma criança não veja a mesma pessoa na frente dele, no segundo dia, os alunos decidem alternar posições para que nenhum menino é precedido pelo mesmo rapaz que o procederam no primeiro dia. Mostre que o número de maneiras em que elas podem alternar posições é

   $$n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1!$$

   Sol:
   Considere

$$A = \text{o conjunto das permutações do conjunto } \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}.$$

e para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ os conjuntos

$$A_i = \text{o conjunto das permutações do conjunto } \{1, 2, 3, 4, \ldots, n\} \text{ tal que o padrão } i(i+1) \text{ ocorre.}$$

A quantidade procurada é $\left|\bigcap_{k=n}^{n} A_i^c\right|$. Más,

$$\begin{aligned}
|A| &= n! \\
|A_i| &= \binom{n-1}{1}(n-1)! \\
|A_{i_1} \cap A_{i_2}| &= \binom{n-1}{2}(n-2)! \\
|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| &= \binom{n-1}{3}(n-3)! \\
\vdots \quad &\vdots \\
\left|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right| &= \binom{n-1}{n-1}1! \\
\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| &= 0
\end{aligned}$$

Portanto, pelo principio da inclusão-exclusão

$$\begin{aligned}
\left|\bigcap_{k=n}^{n} A_i^c\right| &= n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! - \cdots (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1! \\
&= n! + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}(n-i)!.
\end{aligned}$$