Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações
Lista 4

Resolva os seguentes exercicios. Defina primeiro o espaço amostral para cada exercicio.

1. Uma moeda é lançãda 5 vezes. Definir espaços amostral diferentes de acordo com os seguintes objetivos

   (a) Somente o número de caras é de interese.

   (b) O resultado de cada lançamento individual é de interese.

   (c) Mostrar que qualquer espaço amostral que satisfaz (b) pode ser também usado em (a), mas a afirmação reciproca não é valida.

   Sol:

   (a) Vamos a representar cada evento elementar como $\omega =$"número de caras obtidas nos cinco lançamentos" . Portanto, o possivél espaço amostral é

   $$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

   (b) Um possivél espaçõ amostral é

   $$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_4, \omega_5) : \omega_i \in \{C, K\}\},$$

   onde cada ω_i represnta o resultado do i-ésimo lançamento da moeda, o qual pode ser $C =$"cara" e $K =$"coroa", com $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

   (c) Se tomamos um evento elementar do espaço amostral do item (b) podemos obter o número de caras que foram obtidas (espaço amostral do item (a)). Mas, note que tendo conhecimento do número de caras que han sido obtidos nos cinco lançãmentos não podemos saber o resultado de cada lançamento indicidual.

2. Num povoado de $n + 1$ habitantes, uma pessoa conta alguma coisa a uma segunda pessoa, esta pessoa repite o rumor a uma terceira, e assim vai. Em cada passo é escolhido aleatoriamente o receptor do rumor dentre as n pessoas. Encontrar a probabilidade de que o rumor pase r vezes sem:

   (a) regresar para a pessoa que originou o rumor;

   (b) repetir o rumor para uma pessoa.

Sol:
Consideremos a enumeração dos habitantes desde 0 até n, e suponhamos que o rumor parte inicialmente do habitante 0. Vamos a representar cada evento elementar como $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r)$, onde $\omega_i, i = 0, 1, \ldots, n$ são as pessoas as quais chega o rumor depois de ser transmitido pelo habitante 0. Portanto,

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r) : \omega_i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \omega_1 \neq 0, \omega_i \neq \omega_{i-1}\}.$$

Note que Ω é equiprovável e por tanto $|\Omega| = n^r$.

(a) Seja A o evento "o rumor passa r vezes sem regresar ao habitante 0", isto é,

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega_i \neq 0, \forall i\}.$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n(n-1)^{r-1}}{n^r} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-1}.$$

(b) seja B o evento "o rumor passa r vezes sem serepetido para nenhuma pessoa", isto é,

$$B = \{\omega \in \Omega : \omega_i \neq \omega_j, \forall i \neq j\}.$$

Portanto,

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{n^r} = \frac{A_n^r}{n^r} = \frac{n!}{(n-r)!n^r}.$$

3. De um baralho de 52 cartas com quatro naipes se escolhem 5 cartas. Obter a probabilidade de

(a) quatro são Ás;
(b) quatro são Ás e um Rei;
(c) Três são dez e dois Valetes;
(d) obter nove, dez, Valete, Dama e Rei.
(e) três sejam do mesmo naipe e dois de outro; e
(f) pelo menos um é Ás.

Sol:
Para introducir um espaço amostral, denotemos cada carta por un par de números (n, l), onde n representa o número da carta (isto é, $n \in \{1, 2, \ldots, 13\}$) e l representa o naipe (isto é, $l \in \{a, b, c, d\}$)). Portanto, o espaço amostral é¿

$$\Omega = \{\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} : \omega_i \neq \omega_j, \forall i \neq j, \omega_i = (n, l), n \in \{1, 2, \ldots, 13\}, l \in \{a, b, c, d\}\}$$

Note que o espaço é equiprovável e

$$|\Omega| = \binom{52}{5} = 2598960.$$

(a) Seja A o evento "quatro das 5 cartas são Ases.". Note que fixados os 4 ases, temos em total $52 - 4 = 48$ possibilidades para a quinta carta. Portanto,

$$P(A) = \frac{1 \cdot 48}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{54145}.$$

(b) Seja B o evento "quatro casrtas são Ases e uma é Rei". Fixados os 4 ases, temos 4 possibilidades para a quinta carta. Portanto,

$$P(B) = \frac{1 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{649740}.$$

(c) Seja C o evento "três são dez e dois Valetes". Se tem C_4^3 formas de escolher três dez, e C_4^2 maneiras de escolher os dois Valetes. Portanto,

$$P(C) = \frac{C_4^3 \cdot C_4^2}{\binom{52}{2}} = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}.$$

(d) Seja D o sucesso "obter nove, dez, Valete, Dama e Rei". Note que não tem importancia a orden em aparecem as cartas. Portanto,

$$P(D) = \frac{\left(\binom{4}{1}\right)^5}{\binom{52}{5}} = \frac{64}{162435}.$$

(e) Seja E o evento " três cartas são do mesmo naipe e dois de outro". O baralho tem 4 naipes, portanto existem C_4^2 de escolher os dos naipes. Para cadaa uma de estas maneiras, já que cada naipe tem 13 cartas, obtemos um total de C_{13}^3 e C_{13}^2 para escolher as três e dois carta, respectivamente, de cada um dos naipes, então

$$P(E) = \frac{\binom{4}{2}\binom{13}{3}\binom{13}{2}}{\binom{52}{5}} = \frac{429}{8330}.$$

(f) Seja F o evento "pelo menos um é Ás". Portanto, o evento F^c é o evento "nenhuma carta é um Ás". Note que existem 4 ases no baralho, portanto existem C_{52-4}^5 maneiras de escolher cinco cartas tal que nenhuma é um ás. Logo

$$P(F) = 1 - P(F^c) = 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}} = 1 - \frac{35673}{54145} = \frac{18472}{54145}.$$

Os exercícios abaixo não precisam ser entregues na lista. As pessoas que decidirem resolver e entregar ganharão no máximo 1.5 pontos de 10 pontos na segunda prova.

4. Um guarda roupas contem n pares de sapatos. Se ecolhemos aleatoriamente $2r$ sapatos (com $2r < n$), qual é a probabilidade de

   (a) não haja nenhum par completo?

   (b) haja exactamente um par completo?

   (c) haja exactamente dois pares completos?