Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações
Lista 5

Resolva os seguentes exercicios. Defina primeiro o espaço amostral para cada exercicio.

1. Um total de 46% dos eleitores de uma certa cidade classifica a si mesmo como petista, enquanto 30% se classificam como tucanos e 24% se clasificam como democratas. em uma eleição local recente, 35% dos petistas, 62% dos tucanos e 58% dos democratas votaram. Um eleitor é escolhido aleatoriament. Dado que essa pessoa tenha votado na eleição local, qual é a probabilidade de que ele ou ela seja

   (a) petista?

   (b) tucana?

   (c) democrata?

   (d) Que fração dos eleitores participou da eleiçao total?

   Sol:
   Seja Pt, T e D o evento que uma pessoa aleatoria seja petista, tucana ou democrata, respectivamente. Seja V o evento "uma pessoa voto". Então, temos que

   $$P(Pt) = 0.46, \quad P(T) = 0.3, \quad P(D) = 0.24,$$

   e

   $$P(V|Pt) = 0.35, \quad P(V|T) = 0.62, \quad P(V|D) = 0.58.$$

   Vamos a obter primeiro $P(V)$ (item (d)). Então, pela probabilidade total

   $$\begin{aligned} P(V) &= P(V|Pt)P(Pt) + P(V|T)P(T) + P(V|D)P(D) \\ &= (0.35)(0.46) + (0.62)(0.3) + (0.58)(0.24) \\ &= 0.4862. \end{aligned}$$

   (a) Temos que

   $$P(Pt|V) = \frac{P(V|Pt)P(Pt)}{P(v)} = \frac{(0.35)(0.46)}{0.4862} = 0.3311.$$

   (b) Neste casso

   $$P(T|V) = \frac{P(V|T)P(T)}{P(v)} = \frac{(0.62)(0.3)}{0.4862} = 0.38256.$$

   (c) Finalmente

   $$P(T|D) = \frac{P(V|D)P(D)}{P(v)} = \frac{(0.58)(0.24)}{0.4862} = 0.2863.$$

2. Uma urna contem 8 bolas brancas e 4 bolas pretas. Se extraem duas bolas uma a cada vez com reemplazamento. Seja A o evento "a primeira bola extraida é branca" e seja B o evento "pelo menos uma das bolas extraidas é branca". Obter

   (a) $P(A \cap B)$,
   (b) $P(A^c \cap B)$,
   (c) $P(A^c \cap B^c)$,
   (d) $P(A|B)$,
   (e) $P(A|B^c)$,
   (f) $P(B|A)$ e,
   (g) $P(B|A^c)$.

   Sol:
   Um espaço amostral para este problema é

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) : \omega_i \in \{b, p\}, i = 1, 2\},$$

   onde cada ω_i representa a cor da na i-ésima bola extraida, sendo b se a bola é branca e p se é preta. Note que este espaço não é equiprovavel. Temos que

$$\begin{aligned} A \cap B = A &= \{(b, b), (b, p)\} \\ A \cap B^c &= \emptyset \\ A^c \cap B &= \{(p, b)\} \\ A^c \cap B^c = B^c &= \{(p, p)\}. \end{aligned}$$

   Por tanto,

   (a) $P(A \cap B) = P(\{(b, b)\}) + P(\{(b, p)\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.
   (b) $P(A^c \cap B) = P(\{(b, p)\}) = \frac{2}{9}$.
   (c) $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{9}$.
   (d) Temos que
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap b)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{1 - P(B^c)} = \frac{3}{4}.$$
   (e) Temos que
$$P(A|B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = 0.$$
   (f) Temos que
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1.$$
   (g) Temos que
$$P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{3}{2}.$$

3. Determine c, para a expresssão abaixo ser uma função de probabilidade de uma variavél aleatoria discreta X.

$$p(x) = \frac{c}{3^x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} : x = 2 + 1, k \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 3k + 1, k \in \mathbb{N}\}$, obtenha as probabilidades que $P(X \in A)$ e $P(X \in B)$.

Sol:
Pars ser $p(x)$ função de probabilidade, devemos ter que $\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$, mas

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{3^i} = c\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = c\frac{1}{1-1/3} = c\frac{3}{2}.$$

Portanto, $c = 2/3$.
Por outro lado,

$$P(X \in A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{1}{4},$$

e

$$P(X \in B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{3k+1} = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{27}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{27}{26}\right) = \frac{3}{13}.$$

4. Um experimento consiste no lançamento de três moedas. Seja X a v.a. "número de caras obtidas". Obter

   (a) função de probabilidade de X e função de distribuição acumulada e suas graficas.

   (b) Esperança e variancia.

   (c) A probabilidade de obter maximo dois caras.

   (d) Probabilidade de obter pelo menos uma cara.

   Sol:
   Seja C :=cara e K:=coroa. Então, o espaço amostral é

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{C, K\}\}.$$

   Alem disso, $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ e $X \sim Bin(3, 1/2)$.

   (a) Temos que a função de probabilidade é

$$P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{3}{k}\frac{1}{8}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

A função de distribuição acumulada é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0 \\ \frac{1}{8}, & se \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8} & se \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & se \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & se \quad x \geq 3 \end{cases}$$

(b) Temos que

$$E(X) = np = (3)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$
$$Var(X)^2 = npq = (3)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

(c) A probabilidade pedida é

$$P(X \leq 2) = F(2) = \frac{7}{8}.$$

(d) A probabilidade pedida é

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

5. Suponha que dois times joguem uma serie de partidas que termina quando um deles tiver ganhado i partidas. suponha que cada partida jogada seja, independentemente, vencida pelo time A com probabilidade p. Determine a esperança e variancia quando

   (a) $i = 2$.

   (b) $i = 3$.

   Sol:
   Seja N a variável aleatória que determina o número esperado de partidas jogados antes de uma vitória (por qualquer equipe A ou B).

   (a) Temos que $P(N = 1) = 0$, pois precisamos dois jogos ganhados por A ou B. Por outro $P(N = 2) = p^2 + q^2$ que corresponde a que A ganhe os dois jogos ou B ganhe os dois jogos. Temos tambem que $P(N = 3) = 2pqp + 2qpq = 2p^2q + 2q^2p$ e $P(N = k) = 0$ para todo $k \geq 4$ (isto é $R_N = \{2, 3\}$). Note que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{2} P(N = i) &= P(N = 2) + P(N = 3) = p^2 + q^2 + 2p^2q + 2q^p \\ &= p^2 + (1-p)^2 + 2p^2(1-p) + 2(1-p)^2p \\ &= p^2 + 1 - 2p + p^2 + 2p^2 - 2p^3 + 2(1 - 2p + p^2)p \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(N) &= 2(P(N=2)) + 3P(N=3) \\ &= 2(p^2+q^2) + 3(2p^2q + 2q^2p) \\ &= 2 + 2p - 2p^2. \end{aligned}$$

Já que $Var(N)^2 = E(N^2) - [E(N)]^2$, temos que

$$\begin{aligned} E(N^2) &= 4(P(N=2)) + 9P(N=3) \\ &= 4(p^2+q^2) + 9(2p^2q + 2q^2p) \\ &= 4 - 10p - 10p^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} Var(N)^2 &= E(N^2) - [E(N)]^2 \\ &= (4 - 10p - 10p^2) - (2 + 2p - 2p^2)^2 \\ &= 2p(1 - 3p + 4p^2 - p^3). \end{aligned}$$

(b) Neste caso $R_N = \{3, 4, 5\}$, e

$$\begin{aligned} P(N=3) &= p^3 + q^3 \\ P(N=4) &= 3qp^3 + 3pq^3 \\ P(N=5) &= 6q^2p^3 + 6p^2q^3. \end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{i=3}^{5} P(N=i) = p^3 + q^3 + 3qp^3 + 3pq^3 + 6q^2p^3 + 6p^2q^3 = 1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(N) &= 3(p^3+q^3) + 4(3qp^3 + 3pq^3) + 5(6q^2p^3 + 6p^2q^3) \\ &= 3(2p^4 - 4p^3 + p^2 + p + 1). \end{aligned}$$

Já que $Var(N)^2 = E(N^2) - [E(N)]^2$, temos que

$$\begin{aligned} E(N^2) &= 9(p^3+q^3) + 16(3qp^3 + 3pq^3) + 25(6q^2p^3 + 6p^2q^3) \\ &= 3(18p^4 - 36p^3 + 11p^2 + 7p + 3) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} Var(N)^2 &= E(N^2) - [E(N)]^2 \\ &= 3(18p^4 - 36p^3 + 11p^2 + 7p + 3) - [3(2p^4 - 4p^3 + p^2 + p + 1)]^2 \\ &= -3p(12p^7 - 48p^6 + 60p^5 - 12p^4 - 27p^3 + 18p^2 - 2p - 1). \end{aligned}$$

Os exercícios abaixo não precisam ser entregues na lista. As pessoas que decidirem resolver e entregar ganharão no máximo 2.5 pontos de 10 pontos na segunda prova.

6. Pedro e Juan dividem ao azar uma barra de chocolate com $4n$ porções ($n > 0$) em dois pedaços de modo que o pedaço de Pedro sempre é maior que o pedaço de Juan, quem sempre recebe algo.

   (a) Obter o número esperado de porções de Pedro.

   (b) Obter a variança.