Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações
Prova 1 (Gabarito)

28 de Janeiro do 2019

Existem 12 pontos distribuídos entre as questões, você pode escolher quais exercícios responder, desde que somem pelo menos 10 pontos.

1. (2 pontos) Conjeture uma fórmula para

$$S_n := \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n,$$

em que x é um número real não-negativo e diferente de 1, e use o princípio de indução para estabelecer a conjectura. (Dica: considere xS_n e faça $S_n - xS_n$.)

Sol:
Temos que $xS_n = \sum_{i=1}^{n+1} x^i$, logo

$$\begin{aligned} xS_n - S_n = (x-1)S_n &= \sum_{i=1}^{n+1} x^i - \sum_{i=0}^{n} x^i \\ &= x^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

. Vamos provar usando indução que a ultima expressão se cumpre para todo n.

- Passo 1. Para $n = 1$, temos que

$$S_1 = \sum_{i=0}^{1} x^i = 1 + x = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1}$$

.

- Passo 2. Suponha que é valido para $n = k$, isto é,

$$S_k = \sum_{i=0}^{k} = \frac{x^{k+1}-1}{x-1}.$$

- Passo 3. Verifiquemos que se cumpre para $k+1$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k+1} x^i &= \sum_{i=0}^{k} x^i + x^{k+1} \\ &= \frac{x^{k+1}-1}{x-1} + x^{x^{k+1}} \\ &= \frac{x^{k+1}-1+x^{k+1}(x-1)}{x-1} \\ &= \frac{x^{k+2}-1}{x-1}\end{aligned}$$

Portanto, pelo PIM temos que para todo inteiro n, $S_n = \sum_{i=0}^{n} x^i = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

2. Há quantas soluções possíveis para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21,$$

se x_i com $i = 1, 2, 3, 4, 5$, é um número inteiro não negativo, tal que

(a) (0.7 pontos) $x_1 \geq 3$?

(b) (1.3 pontos) $1 \leq x_1 \leq 10$?

Sol:

(a) Fazendo a mudanza de variaveis $y_1 = x_1 - 3$ e $y_i = x_i$ para $i = 2, 3, 4, 5$, teremos que $y_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3, 4, 5$. Portanto temos a equação (equivalente)

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 18, \quad y_i \geq 0.$$

Portanto o número de soluções é $C_{18+5-1}^{5-1} = C_{22}^{4} = 7315$.

(b) Fazendo a mudança de variaveis $y_1 = x_1 - 1$ e $y_i = x_i$ para $i = 2, 3, 4, 5$, teremos que $0 \leq y_1 \leq 9$ e $y_i \geq 0$ para $i = 2, 3, 4, 5$. Portanto temos a equação (equivalente)

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20.$$

Seja A o conjunto de soluções em inteiros não negativos da equação anterior, e seja A_1 o conjunto de soluções tais que $y_1 \geq 10$. Logo, o numero de soluções procurada é $|A_1^c| = |A| - |A_1|$. Mas

$$\begin{aligned}|A| &= C_{20+5-1}^{5-1} = C_{24}^{4} = 10626 \\ |A_1| &= C_{10+5-1}^{5-1} = C_{14}^{4} = 1001.\end{aligned}$$

Portanto, $|A_1^c| = 10626 - 1001 = 9625$.

3. (2 pontos) Escolha somente um dos item e solucione.

(a) Prove por indução que se n pessoas estão em uma fila, onde n é um inteiro positivo, e se a primeira pessoa na fila é uma mulher e a ultima pessoa é um homem, então em algum lugar na fila há uma mulher diretamente na frente de um homem.

(b) Se $|A| = m$ e $|B| = n$, então, o número de funções $f : A \to B$ é n^m. (Dica: use indução sobre m e considere $A' = A\backslash\{a\}$, onde $a \in A$ quasquer).

Sol:

(a) Provaremos por indução.

- Passo 1. Se $n = 2$, a primeira pessoa é uma mulher e a ultima um homem.
- Passo 2. Suponha que para $n = k$, com $k \geq 2$, na fila existe uma mulher na frente de um homem.
- Passo 3. Vamos mostrar agora que quando $n = k + 1$, na fila existe uma mulher na frente de um homem. De k para $k + 1$ existe uma nova pessoa. Portanto temos três cassos.
  i. A nova pessoa esta na frente da mulher que esta na frente do homem.
  ii. A nova pessoa esta atras do homem que esta atras da mulher.
  iii. A nova pessoa esta no medio da mulher e o homem que estão proximos um do outro. Se a nova pessoa é mulher, ela esta na frente do hommem. se a nova pessoa é um hommem ele esta atras da mulher. Em ambos cassos ele esta atras de uma mulher.

(b) Provaremos por indução.

- Passo 1. Para $m = 0$, temos que $|A| = \emptyset$, e a única função é a função vazio. Neste caso, $n^0 = 1$, e pasa de verificação se cumpre.
- Passo 2. Suponha que se sumpre para m.
- Passo 3. Verifiquemos que se cumpre para $|A| = m + 1$. Escolha um elemento $a \in A$ e seja $A' = A\backslash\{a\}$, um conjunto com m elementos. Qualquer função $f : A \to B$ asigna um elemento $f(a) \in B$ para a e $f|_{A'}$ é uma função de A' em B. Pela hipótese de indução, existem n^m funções de A' em B. Existem n maneiras de asignar $f(a) \in B$ para a, então, existem $n \cdot n^m$ funções de A em B.

4. (2 pontos) Quantos números inteiros entre 1 e 3600, inclusive, são divísiveis por 3, 5 ou 7?

Sejam

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3, 4, \ldots, 3600\} \\ A_3 &= \{x \in A : x \text{ e divisivel por } 3\}, \\ A_5 &= \{x \in A : x \text{ e divisivel por } 5\}, \\ A_7 &= \{x \in A : x \text{ e divisivel por } 7\}. \end{aligned}$$

Portanto a quantidade procurada é $|A_3 \cup A_5 \cup A_7|$, mas

$$\begin{aligned}
|A_3| &= \left\lfloor \frac{3600}{3} \right\rfloor = 1200 \\
|A_5| &= \left\lfloor \frac{3600}{5} \right\rfloor = 720 \\
|A_7| &= \left\lfloor \frac{3600}{7} \right\rfloor = 514 \\
|A_3 \cap A_5| &= \left\lfloor \frac{3600}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 240 \\
|A_3 \cap A_7| &= \left\lfloor \frac{3600}{3 \cdot 7} \right\rfloor = 171 \\
|A_5 \cap A_7| &= \left\lfloor \frac{3600}{5 \cdot 7} \right\rfloor = 102 \\
|A_3 \cap A_5 \cap A_7| &= \left\lfloor \frac{3600}{3 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 34.
\end{aligned}$$

Portanto, usando o principio de inclusão-exclusão,

$$|A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 1200 + 720 + 514 - 240 - 171 - 102 + 34 = 1955.$$

5. Responda:

   (a) (0.5 pontos) Quantas são as maneiras de 6 carros serem estacionados em 6 vagas?

   Sol: 6!.

   (b) (0.5 pontos) Quantos anagramas[1] de 2 letras diferentes podemos formar com um alfabeto de 23 letras?

   Sol: $A_{23}^2 = \frac{23!}{21!} = 23 \cdot 22 = 506.$

   (c) (0.5 pontos) Um amigo moustro-me 5 livros diferentes de matemáticas, 7 livros difernte de física e 10 livros diferentes de quimica e pediu-me para escolher 2 livros com a condição de que eles não fossem da mesma matéria. De quantas maneiras eu posso escolhê-los?

   Sol: $(5)(7) + (5)(10) + (7)(10) = 35 + 50 + 70 = 155$

   (d) (0.5 pontos) Quantas maneiras de distribuir mãos de 5 cartas para cada um dos quatro jogadores, a partir de um baralho de 52 cartas?

   Sol: $C_{52}^5 C_{47,5} C_{42,5} C_{37}^5 = \frac{52!}{5!47!} \frac{47!}{5!42!} \frac{42!}{5!37!} \frac{37!}{5!32!} = \frac{52!}{5!5!5!32!}.$

6. Suponha que tenham entrado em cartaz 3 filmes e 2 peças de teatro

[1] Anagrama: transposição de letras de palavra ou frase para formar outra palavra ou frase diferente.

(a) (1 ponto)e que Carlos tenha dinheiro para assistir apenas a 1 evento. Quantos são os possíveis programas que pode fazer Carlos?

Sol: $3 + 2 = 5$

(b) (1 ponto) e que carlos tenha dinheiro para assistir um filme e uma peça de teatro. Quantos são os possíveis programas que pode fazer Carlos?

Sol: $3 \cdot 2 = 6$.