Análise Combinatória, Probabilidade e Aplicações
Prova 2

14 de Fevereiro do 2019

Resolver os seguentes exercicos desde que a soma dos pontos das questoes resolvidas seja pelo menos 10.

1. Considere a expressão
$$p(x) = \frac{c}{3^x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$
   (a) (1.5 pontos)Determine c, para a expresssão acima ser uma função de probabilidade de uma variavél aleatoria discreta X.

   (b) (1 ponto) Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} : x = 4k, k \in \mathbb{N}\}$ determine $P(X \in A)$ e

   (c) (1 ponto) sendo $B = \{x \in \mathbb{N} : x = k + 4, k \in \mathbb{N}\}$ determine $P(X \in B)$.

   Sol:

   (a) Pars ser $p(x)$ função de probabilidade, devemos ter que $\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = 1$, mas
$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{3^i} = c \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = c\frac{1}{1 - 1/3} = c\frac{3}{2}.$$
   Portanto, $c = 2/3$.

   (b) Por outro lado,
$$P(X \in A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{4k} = \left(\frac{2}{3}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{81}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{81}{80}\right) = \frac{9}{40},$$

   (c) e
$$P(X \in B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{k+4} = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{81}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{2187}.$$

2. Um grupo de homens e mulheres fizeram um curso para parar de fumar. Do total, 48% das mulheres e 37% dos homens que fizeram o curso seguiu sem fumar por pelo menos un ano após o final do curso. No final do ano os que pararam de fumar se reencontraram para uma festa. Se 62% da turma original era de homens

   (a) (1 ponto)que percentual da turma original foi a festa?

   (b) (1 ponto)que percentual daqueles que foram a festa era de mulheres?

Sol:
Seja H o evento que uma pessoa que assiste a festa seja um homem, M o evento que uma pessoa que assiste a festa seja uma mulher, e seja L o evento que a pessoa deixo de fumar por um ano. O problema da as informações

$$P(L|H) = 0.37, \quad P(H) = 0.62, \quad P(L|M) = 0.48, \quad P(M) = 1 - P(H) = 0.38.$$

(a) Usando o teorema da probabilidade total, temos que

$$\begin{aligned} P(L) &= P(L|M)P(M) + P(L|H)P(H) \\ &= (0.48)(0.38) + (0.37)(0.62) \\ &= 0.4118. \end{aligned}$$

(b) Pelo teorema de Bayes, temos que

$$\begin{aligned} P(M|L) &= \frac{P(L|M)P(M)}{P(E)} \\ &= \frac{P(L|M)P(M)}{P(L|M)P(M) + P(L|H)P(H)} \\ &= \frac{(0.48)(0.38)}{(0.48)(0.38) + (0.37)(0.62)} \\ &= 0.442. \end{aligned}$$

3. (2 pontos)Resolva apenas uma das seguintes letras

   (a) Seja $X \sim Bin(n, p)$ com $0 < p < 1$. Mostre que
      i. $\sum_{i=0}^{n} P(X = i) = 1$.
      ii. $E(x) = np$
      iii. $Var(X) = npq$ onde $q = 1 - p$. (Dica: $Var(X) = E[X(X-1)] + E[X] - [E(X)]^2$).

   (b) Seja $X \sim Pois(\lambda)$ com $\lambda > 0$.Mostre que (Dica: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$ e $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$).
      i. $\sum_{i=0}^{\infty} P(X = i) = 1$.
      ii. $E(x) = \lambda$
      iii. $Var(X) = \lambda$ onde $q = 1 - p$.

Sol:

(a) Para $X \sim Bin(n, p)$ temos
   i. Ûsando o teorema do binomio, temos que

$$\sum_{i=0}^{n} P(X = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1.$$

ii. Pela definição de esperança, temos que

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k} (1-p)^{n-(k+1)} \\
&= np
\end{aligned}
$$

iii. Já que $Var(X) = E[X(X-1)] + E[X] - (E[X])^2$, então

$$
\begin{aligned}
E[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-(k-2)} \\
&= n(n-1)p^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$Var(X) = n(n-1)p + np - (np)^2 = np(1-p) = npq.$$

(b) Para $X \sim Pois(\lambda)$ com $\lambda > 0$, temos que

i. Usando a dica,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

ii. Pela definição de esperança e usando a dica, temos que

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{e^{-\lambda\lambda^k}}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$

iii. Já que $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ e a dica

$$
\begin{aligned}
Var(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} - \lambda^2 \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\lambda^k}{k!} - \lambda^2 \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) - \lambda^2 \\
&= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + e^{\lambda} \right) - \lambda^2 \\
&= \lambda e^{-\lambda} (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda}) - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 \\
&= \lambda.
\end{aligned}
$$

4. Um experimento consiste no lançamento de três moedas. Seja X a v.a. "número de caras obtidas". Obter

   (a) (0.5 pontos) Função de probabilidade de X e função de distribuição acumulada e suas graficas.

   (b) (0.5 pontos) Esperança e variancia.

   (c) (0.5 pontos) A probabilidade de obter maximo dois caras.

   (d) (0.5 pontos) Probabilidade de obter pelo menos uma cara.

   Sol:
   Seja C :=cara e K:=coroa. Então, o espaço amostral é

   $$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{C, K\}\}.$$

   Alem disso, $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ e $X \sim Bin(3, 1/2)$.

(a) Temos que a função de probabilidade é

$$P(X=k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{3}{k}\frac{1}{8}, \quad k \in \{0,1,2,3\}.$$

A função de distribuição acumulada é

$$F(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x < 0 \\ \frac{1}{8}, & se \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{4}{8} & se \quad 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} & se \quad 2 \le x < 3 \\ 1 & se \quad x \ge 3 \end{cases}$$

(b) Temos que

$$E(X) = np = (3)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2},$$
$$Var(X)^2 = npq = (3)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

(c) A probabilidade pedida é

$$P(X \le 2) = F(2) = \frac{7}{8}.$$

(d) A probabilidade pedida é

$$P(X \ge 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

5. (1.5 pontos)Suponha que um vendedor de automóveis tem, além de seu salário, uma bonificação de 200 reais por cada automóvel que ele venda. Suponha também que ele necessite vender, no mínimo, 5 automóveis por mês para que ele não seja despedido. Qual a probabilidade do vendedor ser despedido no mês de fevereiro, dado que ele trabalha todos os dias, inclusive finais de semana e feriados. Suponha que ele consiga vender no máximo 1 automóvel por dia com probabilidade de $0,2$ (Suponha que se ele realiza uma venda de i carros com $i > 0$, a ultima venda la realiza o dia 28).

   Sol:
   Seja X_i a v.a que representa a quantidade de dias necessarios para vender i carros. Então,

   $$X_i \sim BN(i; 0,2)$$

   Seja A o evento que o vendedor seja demitido, portanto,

   $$P(A) = \sum_{i=0}^{4} P(X_i = 28).$$

Mas,

$$P(X_0 = 28) = (0,8)^{28} \approx 0,00193428,$$
$$P(X_1 = 28) = \binom{27}{0}(0,2)(0,8)^{27} \approx 0,0004835,$$
$$P(X_2 = 28) = \binom{27}{1}(0,2)^2(0,8)^{26} \approx 0,003264,$$
$$P(X_3 = 28) = \binom{27}{2}(0,2)^3(0,8)^{25} \approx 0,010608,$$
$$P(X_4 = 28) = \binom{27}{3}(0,2)^4(0,8)^{24} \approx 0,0221006.$$

Portanto,

$$P(A) \approx 0,0364561.$$

6. (2 pontos)Determine o valor esperado da soma obtida quando n dados honestos são jogados.

Sol:
Seja X a v.a. que representa a soma dos n dados. Vamos a obter $E(X)$.Para isto, seja

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

onde X_i é o valor obtido no i-ésino dado. Mas

$$E(X_i) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2}.$$

Portanto,

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{7}{2}n.$$