Teorema do binomio

Considere x e y como variaveis e n como um número inteiro não negativo. Então,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Prova: (demonstração combinatoria)

Os termos do produto, quando expandido, estão na forma $x^{n-j} y^j$ $j=0,1,2,\dots,n$

Para contar o número de termos da forma $x^{n-j} y^j$, é necessario escolher $n-j$ x's a partir de n somas (Assim, os outros j termos no produto são y's). Portanto o coeficiente de $x^{n-j} y^j$ é $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$.

Exemplo:

a) Coeficiente de $x^{12} y^{13}$ em $(x+y)^{25}$?

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13!\ 2!} = 5\,200\,300$$

b) $x^{12} y^{13}$ em $(2x-3y)^{25}$?

$$(2x-3y)^{25} = (2x+(-3y))^{25}$$
$$= \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (\cancel{+}-3y)^j$$

Logo o coeficiente de $x^{12} y^{13}$ é quando $j=13$, isto é

$$\binom{25}{13} 2^{15} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13!\ 2!} 2^{12} 3^{13}$$

Identidades:

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $\qquad x=y=1$

- $\sum_{k=0}^{n} (-1) \binom{n}{k} = 0$ $\qquad x=-1,\ y=1$

$\Downarrow$

- $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$

- $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$ $\qquad x=1,\ y=2$

Permutação com repetição

O número de r-permutações de um conjunto com n elementos, com repetição, é n^r

Prova:

Há n maneiras possíveis de escolher um elemento do conjunto para cada uma das r-posições na r-permutação, com repetição, porque para cada escolha todos os n objetos estão disponíveis. Pela regra do produto são possíveis n^r r-permutações com repetição.

~~Co~~ Combinações com repetição

Há $C^{r}_{n+r-1} = C^{n-1}_{n+r-1}$

r-combinações de um conjunto com n elementos quando ~~há~~ a repetição dos elementos é permitida.

Exemplo: 4 tipos de biscoitos. Há quantas maneiras diferentes possíveis de escolher 6 biscoitos? Suponha que apenas é relevante o tipo de biscoito seja relevante, e não os biscoitos individualmente ou a ordem em que são escolhidos.

$C(4+6-1, 6) = C(9,6)$.

Identidade de Vandermonde

Seja m, n e r inteiros não negativos com r não excedendo m ou n. Então,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}.$$

Prova:

Suponha que existem m elementos em um conjunto e n elementos em um segundo conjunto. Então o número total de maneiras de escolher r elementos da união dos conjuntos é

$$\binom{n+m}{r}$$

Outra maneira de escolher r elementos da união é escolher k elementos do segundo conjunto e então $r-k$ elementos do primeiro conjunto, onde k é um inteiro tal que $0 \leq k \leq r$. Já que existem $\binom{n}{k}$ formas de escolher k elementos do segundo conjunto e $\binom{m}{r-k}$ formas de escolher $r-k$ elementos do primeiro conjunto, pela regra do produto temos que

$$\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

maneiras de escolher r elementos. Logo o número total de formas de escolher r elementos da união é

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

Corolário: $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$. Pelo anterior com $m=n=r$, obtemos

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

lembre que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Teorema:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

Prova:

Já que C_n^k é o número de subconjuntos com k elementos do conjunto A com $|A|=n$, então,

$$\binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{n}=$$

é o número total de subconjuntos de A, que sabemos é 2^n, isto é,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\begin{array}{l|ccccccccc}
0 & & & & & 1 & & & & \\
1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
3 & & \boxed{1} & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & \boxed{1} & \\
4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
\quad 2^3=8 = 1+3+3+1$$

Exemplo:

Qual é o valor da soma

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=C_n^1+2C_n^2+\cdots+nC_n^n?$$

Sol:

$$S=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$$

$$=n\,2^{n-1}$$

Teorema das columnas

coluna

$C_n^r = \binom{n}{r}$

linha

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{p+i}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \quad + \binom{p+n}{p}$$

$$= \binom{p+n+1}{p+1}$$

1

1 1

1 2 $\boxed{1}$

1 3 $\boxed{3}$ 1

1 4 $\boxed{6}$ 4 1

1 5 10 $\boxed{10}$ 5 1

Prova:

Temos para a columna $p+1$

$$C_{p+1}^{p+1} = C_{p}^{p+1} + C_{p}^{p}$$

$$C_{p+2}^{p+1} = C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^{p}$$

$$C_{p+3}^{p+1} = C_{p+2}^{p+1} + C_{p+2}^{p}$$

$$\vdots$$

$$C_{p+n}^{p+1} = C_{p+n-1}^{p+1} + C_{p+n-1}^{p}$$

$$C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p+n}^{p+1} + C_{p+n}^{p}$$

Somando (e simplificando parcelas iguais em membros opostos) obtemos

$$C_{p+n+1}^{p+1} = C_p^{p+1} + C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_{p+n-1}^p + C_{p+n}^p$$

e observando que $C_p^{p+1} = 0$, obtemos o desejado

Exemplo:

Qual é o valor da soma

$$S = 1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \dots + 50\cdot 51\cdot 52?$$

Sol:

$$k(k+1)(k+2) = 3!\, C_{k+2}^3 = 3!\,\frac{(k+2)!}{3!\,(k-1)!}$$

$$S = \sum_{k=1}^{50} k(k+1)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{50} 3!\, C_{k+2}^3$$

$$= 6\,|C_3^3 + C_4^3 + \dots + C_{52}^3|$$

$$= 6\cdot C_{53}^4$$

$$= 1756950$$