

Teorema do binômio

Considere x e y como variáveis e n como um número inteiro não negativo. Então,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

Prova: (demonstração combinatoria)

Os termos do produto, quando expandido, estão na forma $x^{n-j} y^j$ $j=0, 1, 2, \dots, n$

Para contar o número de termos da forma $x^{n-j} y^j$, é necessário escolher $n-j$ x 's a partir de n somas (Assim, os outros j termos no produto são y 's). Portanto o coeficiente de $x^{n-j} y^j$ é $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$. ~~□~~

Exemplos

a) Coeficiente de $x^{12} y^{13}$ em $(x+y)^{25}$?

$$\binom{25}{13} = \frac{25!}{13! 2!} \approx 5'200'300$$

b) $x^{12} y^{13}$ em $(2x-3y)^{25}$?

$$\begin{aligned} (2x-3y)^{25} &= (2x + (-3y))^{25} \\ &= \sum_{j=0}^{25} \binom{25}{j} (2x)^{25-j} (-3y)^j \end{aligned}$$

Logo o coeficiente de $x^{12} y^{13}$ é quando $j=13$, isto é

$$\binom{25}{13} 2^{12} (-3)^{13} = -\frac{25!}{13! 2!} 2^{12} 3^{13}$$

Identidades:

$$\bullet \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$x=y=1$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

$$x=-1, y=1$$

\Downarrow

$$\bullet \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

$$\bullet \sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

$$x=1, y=2$$

Permutação com repetição

O número de r -permutações de um conjunto com n elementos, com repetição, é n^r

Prova:

Há n maneiras possíveis de escolher um elemento do conjunto para cada uma das r -posições na r -permutação, com repetição, porque cada escolha todos os n objetos estão disponíveis. Pela regra do produto são possíveis n^r r -permutações com repetição.

Combinações com repetição

$$\text{Há } C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1}$$

n -combinações de um conjunto com n elementos quando ~~há~~ a repetição dos elementos é permitida.

Exemplo: 4 tipos de biscoitos. Há quantas maneiras diferentes possíveis de escolher 6 biscoitos? Suponha que apenas o tipo de biscoito seja relevante, e não os biscoitos individualmente ou a ordem em que são escolhidos.

$$C(4+6-1, 6) = C(9, 6)$$

Identidade de Vandermonde

Seja m, n e r inteiros ^{não} negativos com r não excedendo m ou n . Então,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}.$$

Prova:

Suponha que existem m elementos em um conjunto e n elementos em um segundo conjunto. Então o número total de maneiras de escolher r elementos da união dos conjuntos é $\binom{m+n}{r}$.

Outra maneira de escolher r elementos da união é escolher k elementos do segundo conjunto e então $r-k$ elementos do primeiro conjunto, onde k é um inteiro tal que $0 \leq k \leq r$. Já que existem $\binom{n}{k}$ formas de escolher k elementos do segundo conjunto e $\binom{m}{r-k}$ formas de escolher $r-k$ elementos do primeiro conjunto, pela regra do produto temos que

$$\binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

maneiras de escolher r elementos. Logo o número total de formas de escolher r elementos da união é

$$\sum_{k=0}^r \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

Corolário $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$. Pelo anterior com $m=n=r$, obtemos

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

lembra que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Teoremas:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

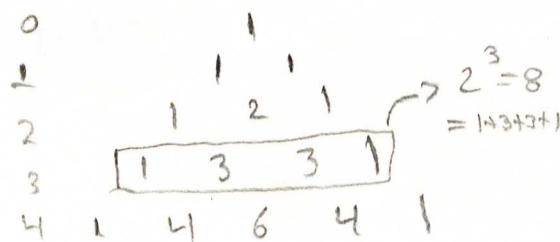
Prova:

Sab-se que C_n^k é o número de subconjuntos com k elementos do conjunto A com $|A|=n$, então,

$$\binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} =$$

é o número total de subconjuntos de A , que sabemos é 2^n , isto é,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$



Exemplo:

Qual é o valor da soma

$$S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n?$$

Sol:

$$S = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}$$

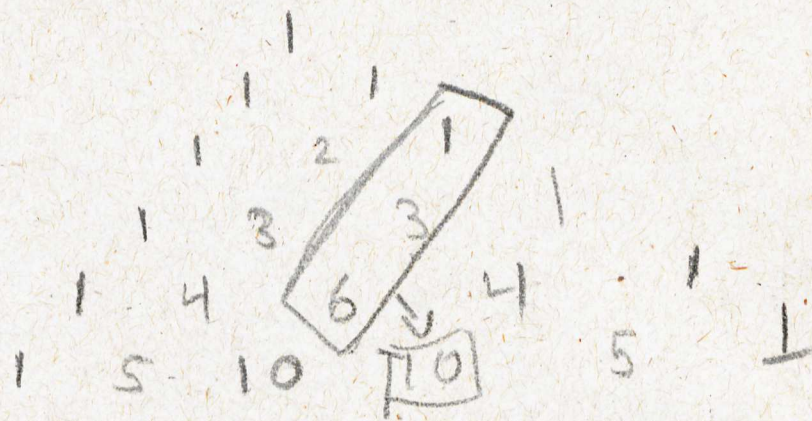
$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$$

$$= n 2^{n-1}$$

Teorema das colunas $C_n^r = \binom{n}{r}$

$$\sum_{i=0}^n \binom{p+i}{p} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \dots + \binom{p+n}{p}$$

$$= \binom{p+n+1}{p+1}$$



Prova

temos para a coluna $p+1$

$$C_{p+1}^{p+1} = C_p^{p+1} + C_p^p$$

$$C_{p+2}^{p+1} = C_{p+1}^{p+1} + C_{p+1}^p$$

$$C_{p+3}^{p+1} = C_{p+2}^{p+1} + C_{p+2}^p$$

$$\vdots$$

$$C_{p+n}^{p+1} = C_{p+n-1}^{p+1} + C_{p+n-1}^p$$

$$C_{p+n+1}^{p+1} = C_{p+n}^{p+1} + C_{p+n}^p$$

somando (e simplificando parcelas iguais em membros opostos) obtemos

$$C_{P+1}^{P+1} = C_A^{P+1} + C_P^P + C_{P+1}^P + C_{P+2}^P + \dots + C_{P+n-1}^P + C_{P+n}^P$$

e observando que $C_P^{P+1} = 0$, obtemos o desejado

Exemplo:

Qual é o valor da soma

$$S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + 50 \cdot 51 \cdot 52$$

Sol:

$$S = \sum_{k=1}^{50} k(k+1)(k+2)$$

$$= \sum_{k=1}^{50} 3! C_{k+2}^3$$

$$= 6 | C_3^3 + C_4^3 + \dots + C_{52}^3 |$$

$$= 6 \cdot C_{53}^4$$

$$= 1756950$$

$$\begin{aligned} & k(k+1)(k+2) \\ & \parallel \\ & 3! C_{k+2}^3 \\ & \parallel \\ & 3! \frac{(k+2)!}{3!(k-1)!} \end{aligned}$$