MAT 0147: Cálculo II Economia (noturno)

Guia 1: Vetores, produto interno, aplicações lineares

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra http://www.geogebra.org

Motivação: Estabelecer ferramentas necessárias para entender vetores consumo, descrever vínculos orçamentarios, além de aplicações lineares (uteis para entender, derivadas e.g, da aplicação demanda, função utilidade, função produção etc)

Objetivo:

(▸ 1) Espaços Euclidianos, vetores e sistemas lineares

(▸ 2) Matrizes, vetores e aplicações lineares

(▸ 3) Produto interno e projeção ortogonal

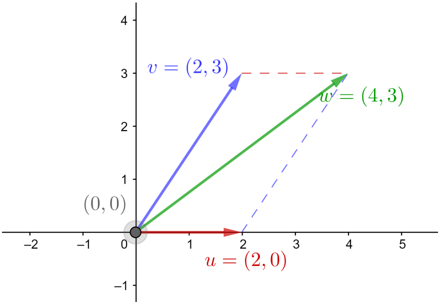
(▸ 4) Vetores com pé

Espaços Euclidianos, vetores e sistemas lineares

$\mathbb{R}^2 := \{(x_1, x_2) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$
$\mathbb{R}^m := \{(x_1, x_2, \cdots, x_m) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$
Sejam $u, v \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Multiplicação por escalar: $\lambda u := (\lambda u_1, \cdots, \lambda u_m)$

Soma de vetores: $w = u + v := (u_1 + v_1, \cdots, u_m + v_m)$



Definição 1

O espaço $\mathbb{R}^m$ com as operações: *multiplicação por escalar* e *soma de vetores*, será chamado **espaço vetorial Euclidiano**. Um elemento deste espaço vetorial será chamado **vetor**.

Obs: Como veremos ao longo desta disciplina vetores do espaço vetorial Euclidiano:

- modelarão *velocidades com pé* em $0 := (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^m$ e assim poderão ser representados como flechas com pé em 0;
- serão *soluções de problemas lineares*, e.g., soluções de sistemas lineares homogêneos.

Obs: Qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^m$ podem ser descrito como **combinação linear** da base canônicas $\{e_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots, 0)\}$, ou seja $v = \sum_i v_i e_i$ com $v_i \in \mathbb{R}$.

Ex:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema 2

Escreva o vetor $(7, -1)$ *como soma de dois vetores, um paralelo ao vetor* $u = (1, 1)$ *e outro paralelo ao vetor* $v = (1, -1)$.

Obs: O vetor $(7,-1)$ não pode ser descrito **somente** em termos de $u=(1,0)$ e $v=(2,0)$

Obs: O vetor $(7,-1)$ não é **unicamente** descrito como combinações dos vetores $u=(1,0)$ e $v=(0,1)$ e $w=(1,1)$. (u, v, w são linearmente dependentes).

Observe que: **qualquer** vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser descrito **unicamente** pela base $\{u, v\}$

Ex 1 $\{u=(1,0), v=(0,1)\}$

ou

Ex 2 $\{u=(1,1), v=(1,-1)\}$.

Definição 3

Um conjunto de vetores $\{\xi_i\}_{i=1}^m = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m\}$ em $\mathbb{R}^m$ é chamado **base** do espaço vetorial Euclidiano $\mathbb{R}^m$ se

(a) combinações lineares de $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ **geram qualquer vetor** em $\mathbb{R}^m$, ou seja dado $v \in \mathbb{R}^m$ sempre existem escalares $c_i \in \mathbb{R}$ tais que $v = \sum_{i=1}^m c_i \xi_i$.

(b) os vetores $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ são **linearmente independentes**, ou seja se tivermos $c_i \in \mathbb{R}$ e $d_i \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{i=1}^m c_i \xi_i = \sum_{i=1}^m d_i \xi_i$ então $c_i = d_i$.

Obs: Observe que vetores $\{\eta_j\}_{j=1}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são linearmente indendentes **se e somente se** $\sum_{j=1}^n k_j \eta_j = 0$ tem como única solução $k_j = 0$.

Obs: Se $\{\eta_j\}_{j=1}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são **L.I** (i.e., linearmente independentes) então obrigatoriamente $n \leq m$.

Problema 4

Descreva $c = (5, -2, 9)$ *em termos de combinação linear de* $\{u = (2, 4, -2), v = (1, -6, 7), w = (1, 0, 2)\}$

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$$

Sol: Eliminação de Gauss

Passo 1: Eq (1) com a Eq(2)

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = & -2 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$$

Seja $l_{21} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = 2$, então $-l_{21} \times Eq(1) + Eq(2) = (N2)$

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0x_1 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$$

Passo 2: **Eq(1)** com a **Eq (3)**

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = & 9 \end{array}$$

Seja $l_{31} = \frac{a_{13}}{a_{11}} = -1$, então $-l_{31} \times Eq(1) + Eq(3) = (N3)$

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ 0x_1 & +8x_2 & +3x_3 & = & 14 \end{array}$$

Passo 3: Eq (2) com a Eq (3)

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ 0 & +8x_2 & +3x_3 & = & 14 \end{array}$$

Seja $l_{32} = \frac{a_{23}}{a_{22}} = -1$, então $-l_{32} \times Eq(2) + Eq(3) = (N3)$

$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ 0 & +0x_2 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

Passo 4: Retro-substituição

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = & 5 \\ 0 & -8x_2 & -2x_3 & = & -12 \\ 0 & +0 & +x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x_3 & = & 2 \\ x_2 & = & 1 \\ x_1 & = & 1 \end{array}$$

Proposição 5

Dado um conjunto de vetores

$$u = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$$
$$v = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$$
$$w = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$$

considere o sistema linear homogenêo $Ax = 0$ *que tem colunas* u, v, w, *i.e.,*

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & 0 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = & 0 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & = & 0 \end{array}$$

Então conjunto de vetores $\{u, v, w\}$ *forma uma* ***base de*** $\mathbb{R}^3$ *se e somente se a única solução do sistema* $Ax = 0$ *for a solução trivial i.e,* $x = (0, 0, 0)$.

Definição 6

Um subconjunto $W \subset \mathbb{R}^{m+k}$ é chamado **subespaço vetorial** de $\mathbb{R}^{m+k}$ se:

(a) u e $v \in W$ então $u + v \in W$

(b) $u \in W$ então $\lambda u \in W$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemplo 7 (reta em $\mathbb{R}^2$ passando por 0)

$$W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0\}$$

Exemplo 8 (plano em $\mathbb{R}^3$ passando por 0)

$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 0\}$$

Definição 9

Seja $W \subset \mathbb{R}^{n+k}$ um subespaço vetorial. Um subconjunto de vetores $\{\eta_j\}_{j=1}^n$ de W é chamado **base** de W se

(a) todo $w \in W$ pode ser escrito como **combinação linear** de $\{\eta_j\}_{j=1}^n$, ou seja $w = \sum_{j=1}^n c_j \eta_j$ onde $c_j \in \mathbb{R}$;

(b) $\{\eta_j\}_{j=1}^n$ são **linearmente independentes**, ou seja se tivermos $c_j \in \mathbb{R}$ e $d_j \in \mathbb{R}$ tais que $\sum_{j=1}^n c_j \eta_j = \sum_{j=1}^n d_j \eta_j$ então $c_j = d_j$.

Obs: 2 bases de W tem o mesmo número de elementos n. Tal número é chamado **dimensão**, e denotado por $\dim W = n$

Exemplo 10

Considere $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\}$ Ao resolver o sistema linear concluimos que: $x_1 = -\frac{1}{2}(3x_2 + 4x_3)$ e assim $x \in W$ equivale a:

$$
\begin{aligned}
x &= (x_1, x_2, x_3) \\
&= \Big(-\frac{1}{2}(3x_2 + 4x_3), x_2, x_3 \Big) \\
&= x_2(-\frac{3}{2}, 1, 0) + x_3(-2, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Assim vetores candidatos para base de W são:

- $\eta_1 = (-\frac{3}{2}, 1, 0)$ ou seja substuimos $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$
- $\eta_2 = (-\frac{4}{2}, 0, 1)$ ou seja substuimos $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$

Não é difícil notar que $\{\eta_1, \eta_2\}$ é L.I, (de fato $\eta_1 \neq \lambda\eta_2$) e pelo sistema acima $\{\eta_1, \eta_2\}$ gera W.

Comentários: Eliminação de Gauss pode ser aplicada para qualquer sistema linear (eventualmente com permutações). Lembrando que um sistema linear homogêneo $Ax = 0$sempre tem solução, porém pode ter um número infinito de soluções. A dimensão do espaço de soluções $Ax = 0$ é **o número** variáveis livres. Dado o sistema escalaonado (i.e., passo 4), fixo uma equação, a primeira variável com valor diferente de zero, é chamada **variável pivô** (daquela linha). ***As variavéis pivôs sempre são determinadas em termos das variáveis livres.***

Ex: suponha a_{11} e a_{22} diferentes de zero:

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & = & 0 \\ 0 & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & = & 0 \end{array}$$

Então x_3 é variável livre (dim do espaço solução $Ax = 0$ é 1) e x_2 e x_1 são variáveis pivos.

$x \in \mathbb{R}^3$ atende $Ax = 0$ se e somente se:

$$\begin{aligned} x &= \Big(\frac{1}{a_{11}}\big(-a_{12}\big(\frac{-a_{23}}{a_{22}}\big) - a_{13}\big)x_3, \frac{-a_{23}}{a_{22}}x_3, x_3\Big) \\ &= x_3\Big(\frac{1}{a_{11}}\big(-a_{12}\frac{-a_{23}}{a_{22}} - a_{13}\big), \frac{-a_{23}}{a_{22}}, 1\Big) \end{aligned}$$

Comentários (exemplo trabalhado): Seja W o espaço vetorial das soluções do sistema linear homogêneo

$$\begin{array}{ccccccc} +1x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ +2x_1 & +6x_2 & +9x_3 & +7x_4 & = & 0. \\ -1x_1 & -3x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 0 \end{array}$$

Escalonando:

$$\begin{array}{ccccccc} +1x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 0 \\ 0 & 0 & +3x_3 & +3x_4 & = & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & = & 0 \end{array}$$

Note que $x \in W \Leftrightarrow x = (-3x_2 + x_4, x_2, -x_4, x_4)$.

Assim $\dim(W) = 2$ (o número de variáveis livres.) Uma base $\{\xi_i\}$ de W é:
$\xi_1 = (-3, 1, 0, 0) \quad \text{i.e.}, x_2 = 1, \text{e } x_4 = 0$
$\xi_2 = (1, 0, -1, 1) \quad \text{i.e.}, x_2 = 0, \text{e } x_4 = 1$

Teorema 11

Todo subespaço vetorial W de $\mathbb{R}^{n+k}$ é solução de um sistema linear homogêneo.

Matrizes, vetores e aplicações lineares

Formalmente falando, uma **matriz** A de **tamanho** $n \times m$ é uma função de $\{1 \cdots n\} \times \{1 \cdots m\} \to \mathbb{R}$. Podemos representar tal função via tabela com 2 indices, $i = 1 \cdots n$ para **linha**, $j = 1 \cdots m$ para **coluna** e escrever $A = [a_{ij}]$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ é matriz 3×3 com $a_{2,1} = 4$

Ex: $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -6 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ é matriz 3×2 e $b_{3,2} = 7$

Ex: $\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$ é matriz 3×1. Note que ela pode ser identificada com o vetor $v = (1, -6, 7) \in \mathbb{R}^3$.

Obs: Iremos frequentemente identificar um vetor $v = \sum_i v_i e_i \in \mathbb{R}^m$ (descrito em termos da base canônica) como uma $m \times 1$ matriz (**matriz coluna**) $[a_{i1}]$ com $a_{i1} = v_i$.

Tais como vetores em $\mathbb{R}^m$, podemos somar matrizes $n \times m$ por matrizes $n \times m$ e podemos multiplicar matriz por número real. Ou seja, se A e B são matrizes $n \times m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

- $C = A + B$ onde $[c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$
- $\lambda C = [\lambda c_{ij}]$

Podemos multiplicar matrizes A e B se elas forem **compatíveis** i.e., sejam:

- A é matriz $n \times l$
- B é matriz $l \times m$

Então $C = AB = [c_{ij}]$ é matriz $n \times m$ onde $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$

Ex: Sejam

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ matriz 1×3 (matriz linha)

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ matriz 3×1 (matriz coluna)

Assim $C = AB$ é uma matriz 1×1

$$\begin{aligned} [c_{11}] = AB &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= (-1)(1) + (-1)(-2) + (1)(1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

obs: No caso geral o coeficiente c_{ij} é a matriz 1×1 resultado do produto da matriz (linha) obtida pela i linha de A com a matriz (coluna) obtida pela j coluna de B

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 12

Uma aplicação $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é chamada **aplicação linear** se atende as propriedades:

- $T(\lambda v) = \lambda T(v)$
- $T(v + w) = T(v) + T(w)$

Dado uma $n \times m$ matriz A podemos definir uma **aplicação linear** do $\mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}^n$ *via multiplicação de matrizes*, uma vez que vetor $x \in \mathbb{R}^m$ pode ser identificado como uma matriz coluna $m \times 1$.

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \to & Ax \end{array}$$

Obs: Por vezes usamos a notação $[T] = A$ e $[T]$ é chamada **representação matricial de** T **na base canônica**.

Exemplo 13 (Rotação $\theta = \frac{\pi}{4}$)

Seja $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

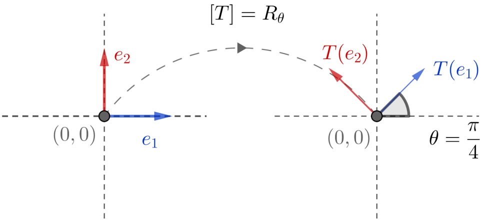
Então $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ será $T(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Ou seja

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2\right) \\ &= x_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &+ x_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Obs: A transformação T é uma rotação de $\theta = \frac{\pi}{4}$. Mais geralmente podemos definir R_θ

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$



Exemplo 14 (Modelo de Markov de empregabilidade)

Em nosso modelo x_1 é número de indivíduos com trabalho, x_2 numero indivíduos sem trabalho. Sejam $0 \leq q \leq 1$ probabilidade do individuo (com trabalho) manter o trabalho depois de 1 semana, $0 \leq p \leq 1$ probabilidade do individuo (sem trabalho) achar um trabalho depois de 1 semana. Definamos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como

$$T(x) = \begin{bmatrix} q & p \\ (1-q) & (1-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ou seja $T(x_1, x_2) = \big(qx_1 + px_2, (1-q)x_1 + (1-p)x_2\big)$

Obs: A aplicação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida como $T(x) = Ax$ mede a distribuição de empregabilidade depois de 1 semana. A aplicação linear $T^2 = T \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é $T^2(x) = A^2 x$ (onde $A^2 = AA$ é *o produto de matrizes*) mede a distribuição de empregabilidade depois de 2 semanas. De forma analoga a aplicação linear $T^3 = T \circ T \circ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mede a distribuição de empregabilidade depois de 3 semanas e assim por diante.

Proposição 15

Toda aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *pode ser descrita por multiplicação de matriz i.e,* $T(x) = [T]x$, *indentificando* $x = \sum_i e_i$ *com a matriz coluna* $[x_i]$

Demonstração.

Dado a base **canônica** $\{e_i\}$ e escrevendo $x = \sum_i x_i e_i$, temos $T(x) = \sum_i x_i T(e_i)$ ou seja para determinar a matriz A devemos:

- Determinar o vetor $T(e_j)$ (matriz coluna), i.e., $x_j = 1$ e $x_i = 0$ $(j \neq i)$
- colocar $T(e_j)$ **na coluna** j da matriz $[T] = A$.

$\square$

Ex Voltemos ao nosso Exemplo 13. Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tenha sido apresentada como:

$$T(x_1, x_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_2, \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)$$

Assim

$$T(1,0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$T(0,1) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

Assim a representação matricial de T na base canônica é:

$$[T] = A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Prob: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicação definida como $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$. Então

(a) Determine a representação matricial na base canônica $[T]$.

(b) Descreva geometricamente o que T faz.

Prob: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ aplicação definida como $T(x_1, x_2) = (2x_1 + 2x_2, 3x_2)$. Então

(a) Determine a representação matricial na base canônica $[T]$.

(b) Seja $R = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \leq x_1 \leq 1, \, 0 \leq x_2 \leq 1\}$. Esboce $T(R) = \{y \in \mathbb{R}^2 | \, y = T(x), x \in R\}$

Prob: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a aplicação linear definida como $T(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$

(a) Determine a representação matricial na base canônica $[T]$.

(b) Dado $c \in \mathbb{R}$ esboce a pre imagem (chamada também conjunto de nível) $T^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, T(x) = c\}$

Sistema lineares revisados

Seja A a matriz com colunas u, v, w. Aplicando a **eliminação de Gauss** temos que a solução do sistema $Ax = c$ se torna equivalente a solução de um sistema $Ux = \tilde{c}$. onde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Proposição 16

Um conjunto de vetores $\{u, v, w\}$ *forma uma* ***base de*** $\mathbb{R}^3$ *se e somente se a eliminação de Gauss aplicada a matriz A (que tem colunas u, v, w) der uma matriz U diagonal superior, cujos elementos da diagonal são todos diferentes de zero.*

Proposição 17 (Decomposição LU)

Seja $n \times m$ matriz A . Suponha que durante a eliminação de Gauss não foi necessário fazer nenhuma permutação de linhas. Então existe uma $n \times n$ matriz L (matriz lower com "1s"na diagonal principal) e uma $n \times m$ matriz U escalonada tal que $A = LU$, sendo que U é a matriz obtida no processo de eliminação de Gauss e coeficientes de L são os l_{ij} gerados no processo.

Ex: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Comentário: Quando eliminação de Gauss demanda permutação de linhas, temos que existe uma $n \times n$ matriz P (invertível) tal que $PA = LU$.
Decomposição LU é util para calculo numérico, e tem papel fundamental para compreender imagem $Im(T)$ e pre-magem $T^{-1}(0)$ (também chamada de kernel ou núcleo de T) da aplicação linear $T(x) = Ax$

Comentários: Na disciplina de Cálculo II estaremos (a menos de explicitamente mencionado) considerando transformações lineares, aplicações e funções descritas na base canônica. Porém as vezes pode ser útil descreve-las em outra base. Ilustremos 2 casos. Sejam $[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, vetores $q_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $q_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, e aplicação linear $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $Q(x) = [Q]x$. Note que $Aq_1 = q_1$ e $Aq_2 = -q_2$.

Caso 1 Seja a aplic. linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definda como $T(x) = Ax$. Obs:

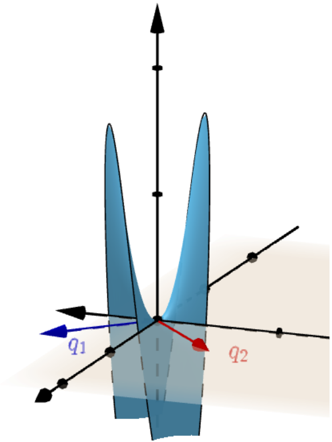
$$T \circ Q(x) = T(x_1 q_1 + x_2 q_2) = x_1 q_1 - x_2 q_2$$

ou seja T *é uma reflexão na direção de* q_1.

Caso 2: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^t A x = 2x_1 x_2$. Então:

$$f \circ Q(x) = f(x_1 q_1 + x_2 q_2) = x_1^2 - x_2^2$$

ou seja *o gráfico da função (não linear)* f é uma rotação do gráfico de $\tilde{f} = f \circ Q$ (a qual é uma sela de cavalo)


q_1
q_2

Comentários: Considere uma $m \times m$ matriz A. Se $Aq_i = \lambda_i q_i$, o vetor q_i é chamado um **auto-vetor** e o número λ_i é chamado **auto-valor** associado a q_i. O comentário anterior já indica quão útil pode ser ter uma base de auto-vetores. Adiantemos aqui um resultado que usaremos posteriormente nesta disciplina (quando formos estudar a matriz $\mathrm{Hess}\,\mathrm{f}(p)$).

Teorema espectral *Dado uma $m \times m$ matriz A simétrica (i.e., $A = A^t$), então existe uma base ortonormal de auto-vetores $\{q_i\}$,* (para definição de ortonormal, vide Definição 21 na próxima seção)

Ilustremos a relevância de auto-vetores, resolvendo E.D.O linear a seguir:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

.

Sejam $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $q_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ Note que q_1 e q_2 são auto-vetores de B com auto-valores: $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -3$. Note que:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = c_1 \exp(t\lambda_1) q_1 + c_2 \exp(t\lambda_2) q_2$$

atende a E.D.O $x'(t) = Bx(t)$. Fato de $\{q_i\}$ ser base e unicidade de E.D.O garantem que todas as soluções são dadas desta forma.

Comentários: Cálculo de auto-vetores e auto-valores:
$Bv = \lambda v$ equivale a $(B - \lambda Id)v = 0$ e tal sistema tem solução não trivial se e somente se $(B - \lambda Id)$ não for invertivel, ou seja se e somente se $p(\lambda) = \det(B - \lambda Id) = 0$. Vejamos um exemplo: $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Passo 1: Encontre os auto-valores, i.e., resolva $p(\lambda) = 0$,

$$0 = p(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$$

, i.e., $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$

Passo2: Encontre os auto-vetores,i.e, para cada λ_i resolva o sistema

$$\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = -1$ solução é (x_2, x_2), para $\lambda_2 = -3$ solução é $(-x_2, x_2)$.
Assim uma base ortonormal de auto-vetores é
$\{q_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), q_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$

Imagem de aplicações lineares e subespaços vetoriais

Imagens de aplicações lineares $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+k}$ são **subespaços vetoriais**.

Obs: Seja uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+k}$ definida como $T(x) = Ax$. Então as colunas de A são **base** da imagem $W = Im(T)$ se uma das equivalências vale:

- T é injetora,
- as colunas de A são linearmente independentes,
- todas as colunas de U (obtidas no escalonamento de A) são pivos, i.e., existem m pivôs.

No caso acima dim $W = m$

Comentários (exemplo trabalhado): Determinemos uma base $W = \mathrm{im}(T) = \{y \in \mathbb{R}^3 | y = T(x), \forall x \in \mathbb{R}^4\}$ onde $T(x) = Ax$ para

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Seja $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matriz escalonada de A.
Utilizando decomposição $A = LU$ possível mostrar que:

As colunas de A que são base de W coincide com as **posições** das colunas de U onde tem os pivôs. Ou seja base $\{\xi_1, \xi_2\}$ de $W = \mathrm{Im}(T)$ é:

$$\xi_1 = (1, 2, -1)$$
$$\xi_2 = (3, 9, 3)$$

e $\dim(W) = \mathrm{Im}(T) = 2$ é o número de variáveis pivôs.

Produto interno e projeção ortogonal

Definição 18

O **produto interno** (canônico) é a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida como $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$

No caso $\mathbb{R}^2$

$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$

No caso $\mathbb{R}^3$

$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

Obs: Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e as matrizes $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$, $U^t = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$ (**transposta** de U)

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \\ &= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ &= U^t V \end{aligned}$$

Def: Dado uma $n \times m$ matriz $A = [a_{ij}]$ **a matriz transporta** A^t é matriz $m \times n$ definida como $A^t = [a_{ji}]$ (ou seja as colunas de A se tornam linhas de A^t).

Proposição 19

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^m$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *O produto interno canônico em* $\mathbb{R}^m$ *atende as seguintes propriedades:*

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$
5. $\langle u, u \rangle = 0$ *se e somente se* $u = 0$

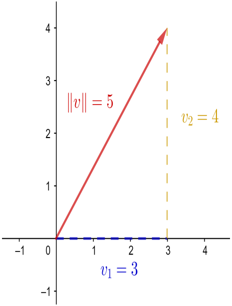
Definição 20

Seja $v \in \mathbb{R}^m$. A **norma de** v é definida como $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$

Ela medirá o **tamanho** do vetor v

Ex: Seja $v = (3, 4) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \sqrt{\langle v, v \rangle} \\
&= \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2} \\
&= \sqrt{3^2 + 4^2} \\
&= \sqrt{9 + 16} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}$$



Prob: Seja $v = (1, 1)$. Calcule:

(a) $\|v\|$

(b) $\|-3v\|$

(c) $\frac{v}{\|v\|}$

(d) $\|\frac{v}{\|v\|}\|$

Obs: Mais geralmente, $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$. Em particular se $\lambda = \frac{1}{\|v\|}$ temos

$$\left\|\frac{v}{\|v\|}\right\| = \frac{1}{\|v\|}\|v\| = 1$$

A norma também permite criar uma **função distância** $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida como

$$d(a, b) = \|a - b\|$$

Tal função atende as propriedades:

- $d(a, b) \geq 0$, e $d(a, b) = 0$ e somente e $a = b$,
- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$

Considere os vetores $u, v \in \mathbb{R}^m$ O **ângulo** entre estes vetores é

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

u, v são **ortogonais** se $\langle u, v \rangle = 0$

Definição 21

Uma base $\{\xi_i\}$ em $\mathbb{R}^m$ é chamada **ortonormal** se

- $\|\xi_i\| = 1$
- $\langle \xi_i, \xi_j \rangle = 0$ para $i \neq j$

Ex: Duas bases ortonormais diferentes de $\mathbb{R}^2$

(a) $\{(1,0),(0,1)\}$

(b) $\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$

Proposição 22

Seja $\{\xi_i\}$ em $\mathbb{R}^m$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. Então para todo $v \in \mathbb{R}^m$ temos:

$$v = \sum_{i=1}^{m} \langle v, \xi_i \rangle \xi_i$$

Prova: Seja $v = \sum_i c_i \xi_i$. Multiplicando os 2 lados por ξ_{i_0} temos

$$\begin{aligned} \langle v, \xi_{i_0} \rangle &= \langle \sum_i c_i \xi_i, \xi_{i_0} \rangle \\ &= \sum_i \langle c_i \xi_i, \xi_{i_0} \rangle \\ &= \sum_i c_i \langle \xi_i, \xi_{i_0} \rangle \\ &= c_{i_0}. \end{aligned}$$

Comentários: Matrizes ortogonais
Uma $m \times m$ matriz Q é chamada **matriz ortogonal** se $\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$. A aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (as vezes até denotada pelo mesmo simbolo Q) definida como $T(x) = Qx$ é chamada **isometria**.

Prob: Verifique que se T é isometria então ela preserva norma e preserva ângulo.

Prob: Verifique que Q é matriz ortogonal, se e somente se $QQ^t = Q^tQ = Id$.

Prob: Seja Q matriz orgotonal $m \times m$ e q_i suas colunas. Verifique que $\{q_i\}$ é base ortonormal de $\mathbb{R}^m$.

Prob: Verifique que: $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ e $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ são matrizes ortogonais.

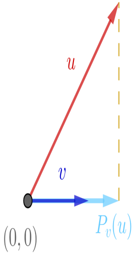
Projeção ortogonal

Motivado pelo Proposição 22 definimos:

Definição 23

Sejam u, v vetores em $\mathbb{R}^m$. A **projeção** de u ao longo de v é definida como

$$P_v(u) = \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|}$$



Ex Seja $(3,5)$ e $(2,0)$.

$$\begin{aligned}
P_v(u) &= \langle u, \frac{v}{\|v\|} \rangle \frac{v}{\|v\|} \\
&= \langle (3,5), \frac{(2,0)}{2} \rangle \frac{(2,0)}{2} \\
&= \langle (3,5), (1,0) \rangle (1,0) \\
&= 3(1,0)
\end{aligned}$$

Recordemos que uma reta contendo zero em $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$\begin{array}{rcl} R &=& \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \quad N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0\} \\ &=& \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \quad \langle (N_1, N_2), (x_1, x_2) \rangle = 0\} \end{array}$$

Obs: $N = (N_1, N_2)$ é um **vetor normal** a reta.

Obs: A distância de um ponto u a uma reta $N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0$ é calculada como a projeção, i.e., $d = \|P_N(u)\|$

Prob: Calcule a distância de $u = (1, 3)$ a reta descrita pela equação da reta $3x_1 + 2x_2 = 0$

Recordemos que um plano contendo zero em $\mathbb{R}^3$ é dada por:

$$\begin{aligned} P &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \quad N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | \quad \langle (N_1, N_2, N_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle = 0\} \end{aligned}$$

$N = (N_1, N_2, N_3)$ é um **vetor normal** a reta.

A distância de um ponto u **ao plano** $N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 0$ é calculada com a projeção, i.e.,

$$d = \|P_N(u)\| = \left\| \left\langle u, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \frac{N}{\|N\|} \right\| = \left| \left\langle u, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right|$$

Imagem de aplicações lineares e projeção ortogonal

Proposição 24

Sejam $u = (a_{1\,1}, a_{2\,1}, a_{3\,1})$ *e* $v = (a_{1\,2}, a_{2\,2}, a_{3\,2})$ *vetores com* $u \neq \lambda v$ *(i.e, linearmente independentes). Considere* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *a aplicação linear* $T(x) = Ax$ *onde*

$$A = \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} \end{bmatrix}$$

Então a imagem de T *é um plano contendo zero. Um vetor normal* N *a este plano atende* $\langle N, u \rangle = 0 = \langle N, v \rangle$

$$i.e., \begin{bmatrix} a_{1\,1} & a_{2\,1} & a_{3\,1} \\ a_{1\,2} & a_{2\,2} & a_{3\,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Além disto os vetores u *e* v *são uma base deste plano.*

Prob Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear $T(x) = Ax$.

(a) Calcule um vetor normal N a imagem de T.

(b) Determine a projeção ortogonal de $q = (2, 2, 0)$ no plano, i.e., o ponto $\pi(q)$ contido no plano tal que $\|q - \pi(q)\|$ é a distancia de q ao plano.

Dica da solução de (b) $\pi(q) = q - P_N(q)$

Obs: No caso particular $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ onde as colunas são linearmente independentes, é possível usar o **produto vetorial** (que só existe em dimensão 3) para calcular um vetor normal N.

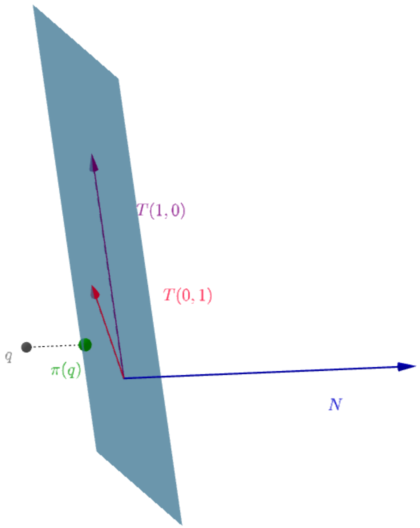


Figura: $\pi(q) = q - P_N(q)$

Vetores com pés

Um vetor com pé em $p \in \mathbb{R}^m$ é definido como:

$$v_p = (p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

O espaço dos vetores com pé em p (**espaço tangente** em p) é definido como $T_p\mathbb{R}^m = \{(p, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \forall v \in \mathbb{R}^m\}$

Espaço $T_p\mathbb{R}^m$ admite:

- estrutura de espaço vetorial:

$$v_p + w_p := (p, v + w)$$

$$\lambda v_p := (p, \lambda v)$$

- produto interno:

$$\langle v_p, w_p \rangle_p := \langle v, w \rangle$$

Vetores com pé modelam velocidade de um movimento retilínio uniforme, ou seja considere a **curva parametrizada** $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ definida como:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= p + tv \\ &= (p_1 + tv_1, \cdots, p_m + tv_m) \\ &= (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_m(t))\end{aligned}$$

então:

$$\alpha'(0) := (\alpha(0), \frac{d}{dt}\alpha(0)) = (p, v)$$

onde $\frac{d}{dt}\alpha(t) = (\frac{d}{dt}\alpha_1(t), \cdots, \frac{c}{dt}\alpha_m(t))$

Obs: É comum na literatura de Cálculo 2, por **abuso de notação**, escrever $\alpha'(0) = v$ mas é bom <u>ter em mente</u> que velocidades são de fato vetores com pé v_p.

Obs: Dado $p, q \in \mathbb{R}^m$ existe uma isometria $\mathcal{T}_{p,q} : T_p\mathbb{R}^m \to T_q\mathbb{R}^m$ (translação) definida como

$$\mathcal{T}_{p,q}(p, v) = (q, v)$$

Devido a esta translação, é comum em várias contas identificar $T_p\mathbb{R}^m$ com $T_0\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m$, (o que não será possível fazer de forma tão simples em superfícies e outros subconjuntos do espaço euclidiano, e.g espaços *curvos*)

Como veremos em Cálculo 2, o pé do vetor será fundamental na **regra da cadeia**, ou seja dado $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dt} f(p + tv)|_{t=0} = df(p)v_p = \langle \nabla f(p), v_p \rangle_p$$

Obs: Dado $p, x \in \mathbb{R}^m$ podemos definir uma parametrização $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ ligando p a x como

$$\beta(t) = p + t(x - p)$$

Note que $\beta(0) = p$ e $\beta(1) = x$ e que $\beta'(0) = v_p = (p, x - p)$.

Utilizando β podemos introduzir geometricamente os conceitos de retas em $\mathbb{R}^2$ e planos em $\mathbb{R}^3$ (que não contém o zero).

Uma reta perpendicular a um vetor $N_p \in T_p\mathbb{R}^2$ (também chamada **reta passado por** p **com um vetor normal** N) é o conjunto de todas posições $\beta(1)$ para todos os todos os vetores (com pé) v_p perpendicular a N_p.

Uma plano perpendicular a um vetor $N_p \in T_p\mathbb{R}^3$ (também chamado **plano passado por** p **com um vetor normal** N) é o conjunto de todas posições $\beta(1)$ para todos os vetores (com pé) v_p perpendicular a N_p.

Definição 25 (Reta passando por $p = (p_1, p_2)$)

$$\begin{aligned} R &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \quad \langle (N_1, N_2), ((x_1, x_2) - (p_1, p_2)) \rangle &= 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \quad N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) &= 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \quad N_1 x_1 + N_2 x_2 &= c\} \end{aligned}$$

onde $c = \langle N, p \rangle \rangle$.

Obs: $N = (N_1, N_2)$ é chamado um **vetor normal** a reta.

Prob: Sejam x_1, x_2 quantidade de mercadorias A e B consumidas por uma pessoa. Sejam $\$ 2,00$ e $\$ 3,00$ os preços unitários de A e B respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é $\$ 10,00$ e esboce tal conjunto.

A distância de um ponto $q \in \mathbb{R}^2$ a reta

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \quad N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) = 0\}$$

é $d = \|P_N(U)\|$ onde $U = q - p$ e $p \in R$. Ou seja:

$$\begin{aligned} d &= \|P_N(U)\| \\ &= \left|\left\langle U, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle q - p, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle\right| \\ &= \frac{1}{\|N\|}\left|\left\langle q, N\right\rangle - \left\langle p, N\right\rangle\right| \end{aligned}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|N_1 q_1 + N_2 q_2 - c\right|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2}}}$$

Problema 26

Calcule a distância de $q = (1,1)$ *para a reta*

$$R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; 2x_1 + x_2 = 4\}.$$

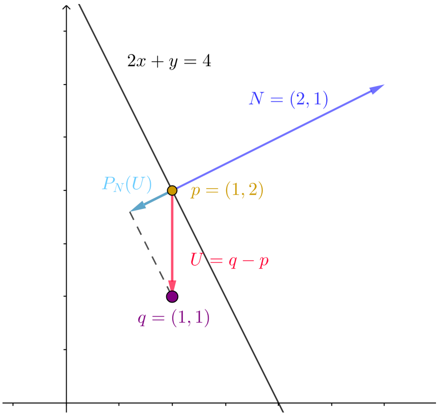


Figura: $d = \|P_N(U)\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Problema 27

Determine o ponto $\pi(q)$ *na reta* $2x + y = 4$ *mais próximo do ponto* $q = (1, 1)$.

Sol: Note que $p = (1, 2)$ pertence a reta. Defina $U = (1, 1) - (1, 2)$. Note que $P_N(U)) = \frac{-1}{\sqrt{5}} \frac{(2,1)}{\sqrt{5}}$

$$
\begin{aligned}
\pi(q) &= \Big(U - P_N(U)\Big) + p \\
&= \Big((0, -1) - \frac{(-2, -1)}{5}\Big) + (1, 2) \\
&= (\frac{7}{5}, \frac{6}{5})
\end{aligned}
$$

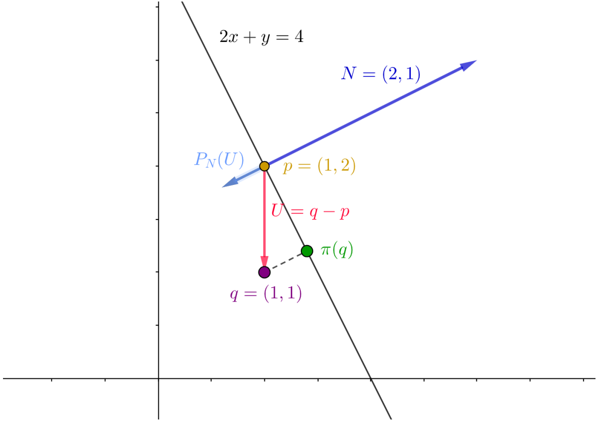


Figura: $\pi(q) = \Big(U - P_N(U)\Big) + p$

Definição 28 (Plano passando por $p = (p_1, p_2, p_3)$)

$$
\begin{aligned}
P &= \{x \in \mathbb{R}^3 | & \langle (N_1, N_2, N_3), ((x_1, x_2, x_3) - (p_1, p_2, p_3)) \rangle &= 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^3 | & N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) + N_3(x_3 - p_3) &= 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R}^3 | & N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 &= c\}
\end{aligned}
$$

onde $c = \langle N, p \rangle \rangle$.

Obs: $N = (N_1, N_2, N_3)$ é um **vetor normal** a reta.

Prob: Sejam x_1, x_2, x_3 o número de unidades das mercadorias A, B e C consumidas por uma pessoa. Sejam \$ 2, 00 e \$ 3, 00 e \$ 4, 00 os preços unitários de A, B e C respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é \$ 10, 00 e esboce tal conjunto.

A **distância** de um ponto $q \in \mathbb{R}^3$ **ao plano**

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 | \quad N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) + N_3(x_3 - p_3) = 0\}$$

é $d = \|P_N(U)\|$ onde $U = q - p$ e $p \in P$. Ou seja:

$$\begin{aligned} d &= \|P_N(U)\| \\ &= \left|\left\langle U, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle q - p, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle\right| \\ &= \frac{1}{\|N\|}\left|\left\langle q, N\right\rangle - \left\langle p, N\right\rangle\right| \end{aligned}$$

$$\boxed{d = \frac{\left|N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 - c\right|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2}}}$$

Obs: Considere 2 planos:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 | N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = c\}$$

$$\widetilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 | \widetilde{N}_1 x_1 + \widetilde{N}_2 x_2 + \widetilde{N}_3 x_3 = \tilde{c}\}$$

Suponha que $N \neq \lambda \widetilde{N}$ (i.e., são linearmente independentes). Então o conjunto $P \cap \widetilde{P}$ é uma **reta** em $\mathbb{R}^3$.