MAT 0147: Cálculo II Economia (noturno)

Guia 3: Derivada de funções de varias variáveis

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra http://www.geogebra.org

Motivação: Discutir derivada de funções, gradientes de funções, regra da cadeia, suas interpretações geométricas e suas várias aplicações (e,g otimização da função utilidade de Cobb-Douglas, lei de Walras etc).

Objetivo:

(1) Derivada parcial
(2) Aplicação derivada
(3) Plano tangente
(4) Derivada de aplicações
(5) Campos de vetores e gradientes
(6) Regra da Cadeia
(7) Gradiente é perpendicular a curva de nível
(8) Multiplicadores de Lagrange (baby version)
(9) Reta tangente a curva de nível
(10) Derivada direcional
(11) Gradiente indica sentido de maior crescimento
(12) Regra da cadeia para aplicações

Derivada parcial

Definição 1

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. A **derivada parcial** com respeito a variável x_i é definida (quando existir) como:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i} f(p) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, \cdots, p_{i-1}, p_i + t, \cdots, p_m) - f(p)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{h(p_i + t) - h(p_i)}{t} \\
&= \frac{d}{dx_i} h(p_i)
\end{aligned}
$$

onde $h(x_i) = f(p_1, \cdots, p_{i-1}, x_i, \cdots, p_m)$ ou seja a função de uma única variável (recorde Cálculo I) obtida fixando todas as variáveis de f com exceção da variável x_i

Exemplo 2

Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Temos então que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dx_1} h(x_1) \\ &= 2x_1. \end{aligned}$$

onde $h(x_1) = x_1{}^2 + x_2^2$ Em particular $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 1) = 2$.

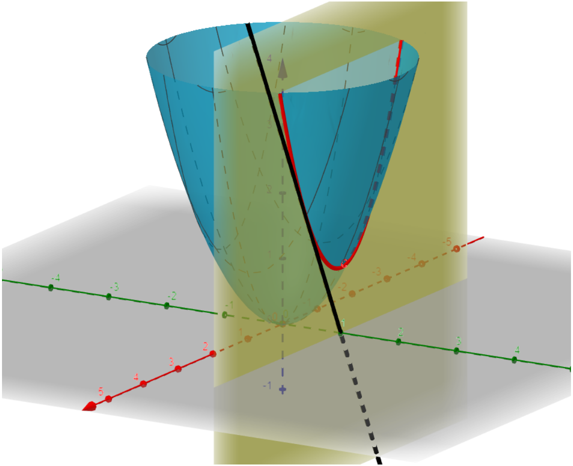


Figura: Ex 2: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1,1) = 2$ é a inclinação da reta tangente a curva plana $S \cap \{x_2 = 1\} = C = \{(x_1, 1, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_1^2\}$ no ponto $(1, 1, 2)$.

Prob Considere a função de produção de Cobb-Douglas $Q = F(K, L) = 4K^{\frac{3}{4}} L^{\frac{1}{4}}$ Calcule $\frac{\partial F}{\partial K}$

Prob Calcule $\frac{\partial}{\partial x_1} \sin(x_1 x_2)$.

Prob Seja $f(x_1, x_2) = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{3}{2}} \exp(\sin(x_1^2 x_2))$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial x_1}(1, 0)$.

Várias derivadas parciais

Def: Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ é continua para qualquer i.

Def: Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^k se $\frac{\partial^n f}{\partial^{i_1} x_1 \cdots \partial^{i_m} x_m}$ para $n \leq k$ e $i_1 + \cdots i_m = n$.

Prop: Compostas, somas,diferenças, multiplicação e divisão (onde fizer sentido) de funções C^k ou suaves são funções C^k ou suaves.

Proposição 3

Se $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *é de classe* C^2 *então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Exemplo 4

$f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) = x_2 \cos(x_1 x_2)$.

$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_1 x_2)$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \cos(x_1 x_2) - x_1 x_2 \sin(x_1 x_2)$

Aplicação derivada

Uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto $p \in U$ se: existem

- uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$;
- uma função $R : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}$

que atendem para $\forall x \in B_\epsilon(p)$:

$$f(x) = f(p) + A(x-p) + R(x-p)$$

$$\lim_{x \to p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|} = 0$$

A aplicação linear A que atende a eq. acima é única, é chamada **derivada no ponto** p e denotada por $df(p) = A$;

Prop Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $p \in U$. Então

$$df(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}$$

Prova: Vamos considerar o **caso** $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(p_1+t, p_2) &= f(p) + df(p)\Big((p_1+t, p_2) - (p_1, p_2)\Big) + R(x-p) \\ &= f(p) + df(p)(t, 0) + R(x-p) \\ &= f(p) + t\, df(p)(1, 0) + R(x-p) \end{aligned}$$

$\frac{f(p_1+t,p_2)-f(p)}{t} = df(p)(1,0) + \frac{R(x-p)}{t}$, tomando $t \to 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = df(p)(1,0) \text{ Q.E.D.}$$

Teorema 5

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ são contínuas então f é diferenciável.

Plano tangente

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} + R(x-p) \\ &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Big(x_1 - p_1\Big) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Big(x_2 - p_2\Big) + R(x-p) \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{x \to p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|} = 0$$

Assim sendo o **plano tangente** em $q = (p_1, p_2, f(p))$ definido como: $x_3 = f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Big(x_1 - p_1\Big) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Big(x_2 - p_2\Big)$ aproxima o gráfico $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 = f(x_1, x_2)\}$ perto do ponto $q = (p_1, p_2, f(p))$

Visto que o plano tangente é definido como

$$\boxed{-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)\Big(x_1 - p_1\Big) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)\Big(x_2 - p_2\Big) + (x_3 - f(p)) = 0}$$

um vetor **normal** ao plano tangente (e assim normal ao gráfico S) é

$$\boxed{N = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), 1\right)}$$

Prob: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Determine o plano tangente ao gráfico de f no ponto $q = (1, 1, 2)$.

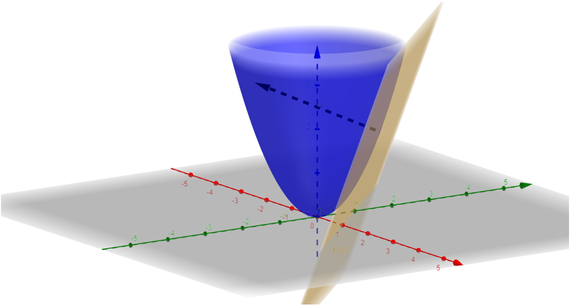


Figura: plano tangente $-2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$ ao gráfico de $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1^2$ no ponto $q = (1, 1, 2)$ Em destaque também vetor normal $N = (-2, -2, 1)$

Derivada de aplicações

Uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $p \in U$ se: existem

- uma aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;
- uma função $R : B_\epsilon(0) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

que atendem para $\forall x \in B_\epsilon(p)$:

$$F(x) = F(p) + A(x-p) + R(x-p)$$

$$\lim_{x \to p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|} = 0$$

A aplicação linear A que atende a eq. acima é única, é chamada **derivada no ponto** p e denotada por $DF(p) = A$;

Prop Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável em $p \in U$ com $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$. Então

$$DF(p) = \begin{bmatrix} df_1(p) \\ \vdots \\ df_n(p) \end{bmatrix}$$

onde $df_i(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é $df_i(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_i}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}$ ou seja

$$DF(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix}$$

Teorema 6

Seja $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Se $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ são contínuas então F é diferenciável.

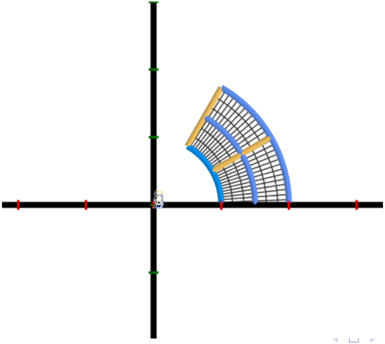
Exemplo 7

Seja $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $F(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$

(a) Calcule $DF(r,\theta)$.

(b) Esboce a imagem $F([\frac{1}{2},1]\times[0,\frac{\pi}{3}])$ destacando as curvas$r \to F(r,\theta_0)$ e $\theta \to F(r_0,\theta)$.

$$DF(r,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}$$



Prob: Seja $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 |, \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 3\right)^2 + x_3^2 = 1\}$

1. Determine se S é gráfico, superfície de revolução ou cilindro sobre curva plana.
2. Esboce S.
3. Determine uma parametrização $\psi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e determine $D\psi$.

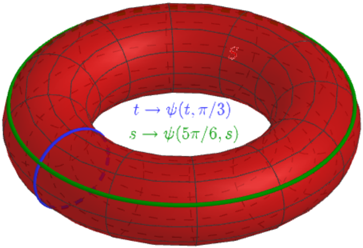


Figura: $\psi(t, s) = (\cos(t) - 3)\cos(s), (\cos(t) - 3)\sin(s), \sin(t)),$
$t \in (0, 2\pi)$, $s \in (0, 2\pi)$

$$D\psi(t, s) = \begin{bmatrix} -\sin(t)\cos(s) & -(\cos(t) - 3)\sin(s) \\ -\sin(t)\sin(s) & (\cos(t) - 3)\cos(s) \\ \cos(t) & 0 \end{bmatrix}$$

Campos de vetores e gradientes

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto. Então definimos $TU = U \times \mathbb{R}^m$. Dado um $p \in U$ então $T_pU = \{p\} \times \mathbb{R}^m$ (espaço tangente) deve ser considerado o espaço dos vetores $v_p = (p, v) \in TU$ **com pé em** p. O espaço T_pU tem uma estrutura de espaço vetorial, i.e., $v_p + w_p = (v + w)_p, \quad \lambda v_p = (\lambda v)_p$.

Dado uma aplicação C^k $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definimos o **campo associado** $\vec{F} : U \to TU$ como $\vec{F}(p) = (p, F(p))$.

Campos canônicos: Dado a base canônica $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^m$ definimos o campo canônico como $\vec{e_i}(p) = (p, e_i)$

Obs Se $F(x) = (f_1(x) \cdots, f_m(x))$ então $\vec{F} = \sum_{i=1}^m f_i(x)\vec{e_i}$.

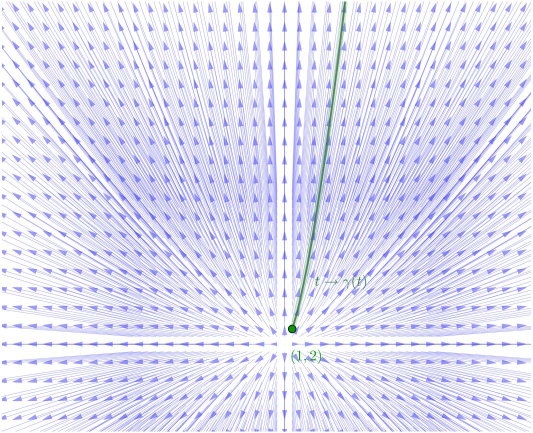


Figura: Ex: 9 $\vec{F}(x) = x_1\vec{e}_1 + \frac{3}{2}x_2\vec{e}_2$

Teorema 8

Seja $\vec{F}$ campo em $U \subset \mathbb{R}^m$ de classe C^k e $p \in U$. Então existe uma (única) curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ de classe C^k tal que

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \vec{F}(\gamma(t)) \\ p &= \gamma(0) \end{aligned}$$

Exemplo 9

Seja $F(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ i.e., $\vec{F}(x_1, x_2) = x_1 \vec{e_1} + \frac{3}{2} x_2 \vec{e_2}$ e $p = (1, 2)$. Então, por Cálculo I, $\gamma(t) = (\exp(t), 2\exp(\frac{3}{2}t))$

Comentários (campos lineares): Seja $\vec{F}$ um campo em $\mathbb{R}^2$ definido por $F(x) = Ax$ onde A é matriz 2×2. Suponha que existe uma base de vetores em $\mathbb{R}^2$ $\{v, w\}$ tal que $Av = \lambda_1 v$ e $Aw = \lambda_2 w$ ou seja v, w são **auto-vetores** e λ_1 e λ_2 **auto-valores** associados (por exemplo, pelo **teorema espectral** *isto acontece quando A é uma matriz simétrica*).
Nesta situação a solução de $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ $\gamma(0) = p$ é

$$\gamma(t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) v + c_2 \exp(\lambda_2 t) w$$

onde c_1 e c_2 são determinados resolvendo o **sistema linear** $p = \gamma(0) = c_1 v + c_2 w$ (vide Guia Resumido 1).
No Ex 9 $\lambda_1 = 1$, $v = (1, 0)$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, $w = (0, 1)$, $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$.

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k, **o campo gradiente** é definido como

$$\boxed{\nabla f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e_i}}$$

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido como $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Então $\nabla f = 2x_1 \vec{e_1} + 2x_2 \vec{e_2}$

Ex: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido como $f(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$. Então $\nabla f = -x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}$

Obs: Nem sempre um campo vetorial é gradiente de uma função. Por exemplo seja $\vec{F}(x_1, x_2) = x_2 \vec{e_1} - x_1 \vec{e_2}$

Vamos supor por absurdo que existisse uma função f tal que $\nabla f = \vec{F}$. Então teriamos $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2$ $\frac{\partial f}{\partial x_2} = -x_1$ e pela Proposição 3 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ Chegariamos a um absurdo pois $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = -1$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 1$. Logo não existe a função f.

Regra da cadeia

Teorema 10

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *função diferenciável,* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to U$ *curva diferenciável definida como* $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \cdots, \alpha_m(t))$. *Considere a função* $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida como* $h(t) = f \circ \alpha(t)$ *Então:*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} h(t_0) &= df(\alpha(t_0))\alpha'(t_0) \\
&= \langle \nabla f(\alpha(t_0)), \alpha'(t_0) \rangle \\
&= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t_0))\alpha_i'(t_0)
\end{aligned}$$

Problema 11

Considere uma função utilidade u suave com $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, x_2) \neq 0$. Suponha que a curva indiferença $C = \{x \in \mathbb{R}^2 |, u(x_1, x_2) = c\}$ seja um gráfico ou seja existe uma função g suave tal que $x_2 = g(x_1)$ Determinemos taxa de marginal de substituição $\frac{dg}{dx_1}$ (i.e, a taxa a qual o consumidor está propenso a substituir um bem pelo outro mantendo o mesmo indice de satisfação) em termos das derivadas parciais de u.

Solução: Defina $\alpha(x_1) = (x_1, g(x_1))$ e $h(x_1) = u(\alpha(x_1)) = c$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{dh}{dx_1} &= \langle \nabla u(\alpha(x_1)), \alpha'(x_1) \rangle \\
&= \frac{\partial u}{\partial x_1}(\alpha(x_1)) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\alpha(x_1)) \frac{dg}{dx_1}(x_1)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{dg}{dx_1}(x_1) = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}(\alpha(x_1))}{\frac{\partial u}{\partial x_2}(\alpha(x_1))}
$$

Gradiente é *"perpendicular"* a curva de nível

Proposição 12

Dado uma função diferenciável $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *e a curva de nível associada* $C = f^{-1}(c) = \{x \in U | f(x) = c\}$ *Suponha que tal curva admite uma parametrização* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to C \subset U$ *com* $\alpha'(t) \neq (0,0)$ *para todo* t. *Então*

$$\langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$$

Prova:

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle &= \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) \\ &= \frac{d}{dt} c \\ &= 0 \end{aligned}$$

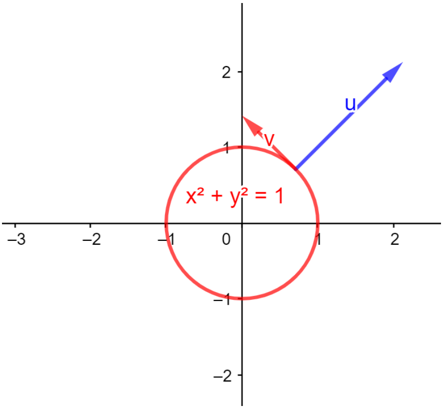


Figura: $u = \nabla f(\alpha(t_0))$, $v = \alpha'(t_0)$ onde $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \alpha(t_0)$,
$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t))$

Multiplicadores de Lagrange (baby version)

Proposição 13

Sejam $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *função diferenciável,*
$C = g^{-1}(c) = \{x \in U | g(x) = c\}$ *a curva de nível associada e*
$u : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *função diferenciável com domínio* $\tilde{U}$ *contendo* U*.*
Suponha que:

(a) $\overrightarrow{\nabla g}(x) \neq (0,0)\ \forall x \in C$;

(b) $u|_C$ *(função* ***restrita a*** C*) tenha* ***máximo ou mínimo em um ponto*** $p \in C$;

Então $\nabla u(p)$ *é perpendicular a curva* C *ou seja:*

$$\begin{aligned} \nabla u(p) &= \lambda \nabla g(p) \\ c &= g(p) \end{aligned}$$

Obs No futuro, veremos pelo teorema da função implícita que condição (a) implica que C admite uma parametrização $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to C \subset U$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) \neq (0,0)$ para todo t. Aqui aceitaremos este fato na demonstração da proposição.

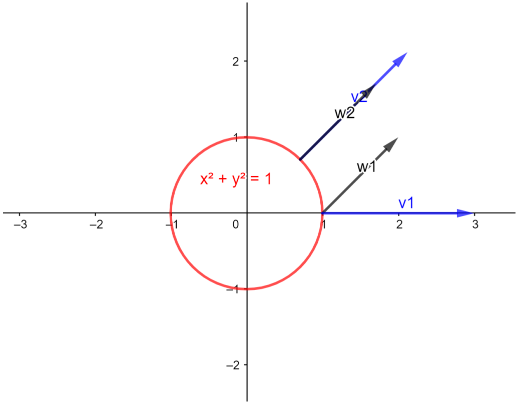


Figura: Dado $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
$w_2 = \nabla u(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \lambda \nabla g(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \lambda v_2$ isto não acontece por ex no ponto $(1, 0)$.

Dem: Primeiro lembre que ∇g é sempre ortogonal a C ou seja escolhida $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to C \subset \mathbb{R}^2$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) \neq (0, 0)$ temos

$$\langle \nabla g(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0 \tag{1}$$

Por outro lado como $u|_C$ (função **restrita a** C) tem **máximo ou mínimo em** $\alpha(0) = p \in C$, temos que a função $h(t) = u(\alpha(t))$ tem máximo ou mínimo interior em $t = 0$, i.e., $h'(0) = 0$. Assim, **pela regra da cadeia**,

$$0 = h'(0) = \langle \nabla u(p), \alpha'(0) \rangle \tag{2}$$

Equações (1) e (2) implicam que

$$\nabla u(p) = \lambda \nabla g(p)$$

o que termina a demonstração.

Multiplicadores de Lagrange junto com o teorema a baixo (que generaliza resultado de Calculo I) permitem estudar mínimos e máximos de funções restritas a conjuntos.

Teorema 14

Sejam $u : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e* $K \subset U$ *um conjunto fechado e limitado (ou seja fechado tal que* $K \subset B_R(0)$*). Então a função restrita* $u|_K$ *possui um valor máximo e um valor mínimo.*

Ex ??: Dado $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ e $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ Obtenha os pontos de máximo e mínimo de $u|_C$ onde
$C = \{x \in \mathbb{R}^2 | \, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Como C é fechado e limitado existe de fato valor maxímo e mínimo. Se p é máximo ou mínimo temos:

$$\begin{aligned} (1,1) = \nabla u(p) &= \lambda \nabla g(p) = \lambda(2p_1, 2p_2) \\ 1 &= p_1^2 + p_2^2 \end{aligned}$$

Obs que $p_i \neq 0$. Isto e a primeira eq. implicam que $p_2 = p_1$, o qual substitutido na segunda eq. permite concluir que as soluções do sistema são $p = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\tilde{p} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

Como $u(p) = \frac{2}{\sqrt{2}}$ e $u(\tilde{p}) = -\frac{2}{\sqrt{2}}$, concluimos que p é o ponto onde u assume o maior valor e $\tilde{p}$ o ponto onde u assume menor valor.

Problema 15

Sejam $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 3x^2 - 6\sqrt{3}x + y^2 + 9 = 3\}$ *e* $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *função definida como* $u(x, y) = 3x + y$*. Encontre* $p \in C$ *tal que* $u(p)$ *assuma maior valor e* $q \in C$ *tal que* $u(q)$ *menor valor em* C*.*

Obs: Este problema pode ser resolvido de 2 formas. A primeira podemos parametrizar C por uma curva $\alpha : [0, 2\pi] \to C$ e usarmos Calculo I para ver os pontos de máximo e mínimos de $h(t) = u \circ \alpha(t)$. A segunda é utilizar Multiplicadores de Lagrange como fizemos no exemplo anterior.

Sol: Visto que C é compacta, existe máximo e mínimo de $u|_C$ e eles estarão entra as soluções do sistema:

$$\begin{aligned} 3 = \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = \lambda 2(x_1 - \sqrt{3}) \\ 1 = \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = \lambda \frac{2}{3} x_2 \\ 1 &= (x_1 - \sqrt{3})^2 + \frac{1}{3} x_2^2 \end{aligned}$$

Note que $\lambda \neq 0 \neq x_2$. Dividindo as 2 primeiras equações concluimos que $(x_1 - \sqrt{3}) = x_2$. Substituindo na terceira concluimos que $x_2^2 = \frac{3}{4}$. Como temos 2 soluções: $p = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, uma deve ser máximo e outra minimo.

1. $p = (\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $u(p) = 5\sqrt{3}$ máximo absoluto.
2. $q = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ $u(q) = \sqrt{3}$ mínimo absoluto.

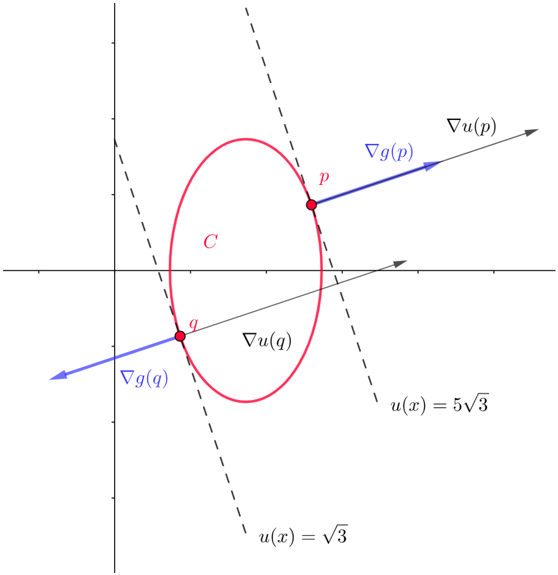


Figura: Vide Problema 15

Exemplo 16 (Cobb-Douglas e orçamentos)

Considere o vinculo $C = \{x \in \mathbb{R}^2 |\, 2x_1 + x_2 = w |\, x_i \geq 0\}$ onde w é um valor fixo (orçamento). Considere a função Cobb-Douglas $u(x) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$. Determine o máximo de $u|_C$.

Se $s = (s_1, s_2)$ é ponto de máximo, ele deve antender:

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2} s_1^{-\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} s_2^{-\frac{1}{2}} s_1^{\frac{1}{2}}) = \nabla u(s) &= \lambda \nabla g(s) = \lambda(2, 1) \\ w &= 2s_1 + s_2 \end{aligned}$$

Resposta: $s(w) = (\frac{w}{4}, \frac{w}{2})$

Comentários (shadow prices): No caso **bem particular** de Cobb Douglas temos a existência de um **único máximo** $s(w)$ **para cada vínculo** $C_w = g^{-1}(w)$, o que nos dá uma curva diferenciável $w \to s(w) \in C_w$. Em particular $g \circ s(w) = w$ Por ser máximo temos: $\nabla u(s(w)) = \lambda(w)\nabla g(s(w))$ Assim, ao multiplicar ambos os lados por $s'(w)$ concluimos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw} u \circ s(w) &= \langle \nabla u(s(w)), s'(w) \rangle \\
&= \lambda(w) \langle \nabla g(s(w)), s'(w) \rangle \\
&= \lambda(w) \frac{d}{dw} g \circ s(w) \\
&= \lambda(w)
\end{aligned}$$

Note porém que **em Cálculo II** estamos interessados em minimizar e maximizar funções u em um vinculo **fixo**. Para este tipo de problema λ é uma variável auxiliar que **não tem papel no problema em si**. Em particular observe que se tivermos 2 funções u e $\tilde{u}$ diferentes mas como $u|_C = \tilde{u}|_C$ obteremos os mesmos máximos e mínimos (mas $\lambda \neq \tilde{\lambda}$). Alé disto no processo de resolução podemos ter casos e cada caso lidar com variáveis auxiliares diferentes λ.

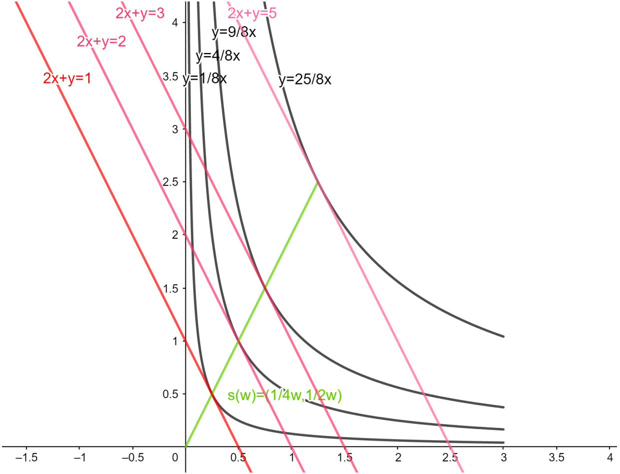


Figura: curvas de máximos no caso **particular de** u sendo **Cobb Douglas** e vários vinculos dado por orçamentos

Reta tangente a curva de nível

Prob Calcule a equação cartesiana da reta tangente a curva de nível $C = \{x \in \mathbb{R}^2 | 4x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ no ponto $p = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$

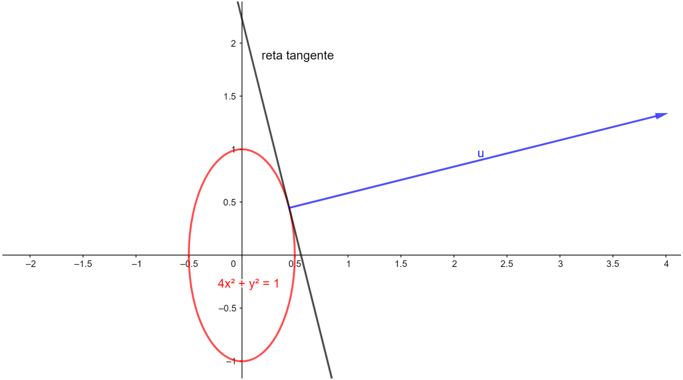


Figura: O vetor normal é $u = \overrightarrow{\nabla} f(p) = (\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ onde $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2$ e a reta tangente é $\frac{8}{\sqrt{5}}(x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{2}{\sqrt{5}}(x_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}) = 0$

Derivada direcional

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função e $v \in \mathbb{R}^m$ como $\|v\| = 1$. A **derivada direcional** na direção v_p é definida:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$

Obs Se f é diferenciável, segue da regra da cadeia (considerando $\alpha(t) = p + tv$)

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \langle \nabla f(p), v_p \rangle$$

$\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ é assim uma *taxa de variação* de f no ponto p no sentido de v.

Problema 17

Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida como* $f(x_1, x_2) = 4x_1^2 + x_2^2$ *Calcule as derivadas direcionais.*

(a) $\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ *onde* $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

(b) $\frac{\partial f}{\partial v}(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ *onde* $v = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$

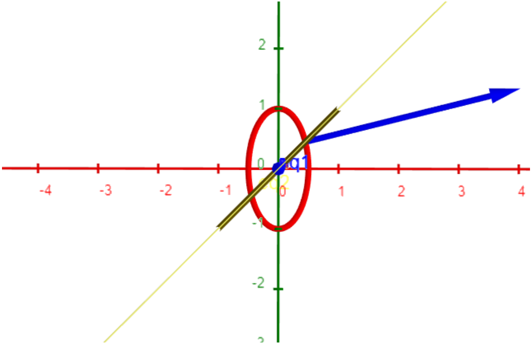


Figura: Prob 17: curva de nível $4x_1^2 + x_2^2 = 1$, $\nabla f(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, e direção dada $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Obs que em geral v_p não precisa sempre estar contido em plano contendo $(0, 0)$

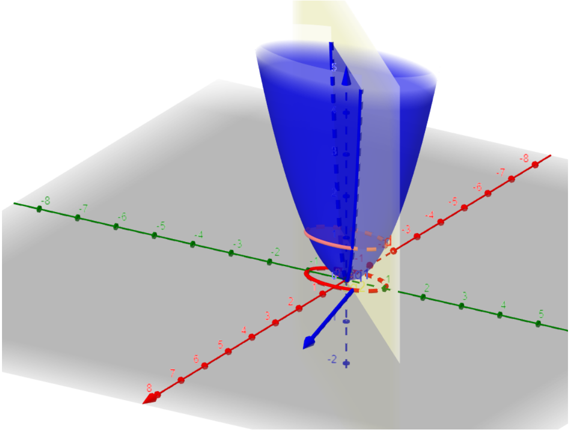


Figura: Prob 17

$\nabla f(p) \neq 0$ indica sentido de maior crescimento de f

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável com $\nabla f(p) \neq 0$. Se $\|v\| = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial v}(p) &= \langle \nabla f(p), v \rangle \\
&= \|\nabla f(p)\| \|v\| \cos(\theta) \\
&= \|\nabla f(p)\| \cos(\theta)
\end{aligned}$$

onde θ é o angulo entre $\nabla f(p)$ e v (lembre que $\|v\| = 1$).

(a) $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ **é máxima se** $v = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$

(b) $\frac{\partial f}{\partial v}(p)$ é mínima se $v = -\frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$

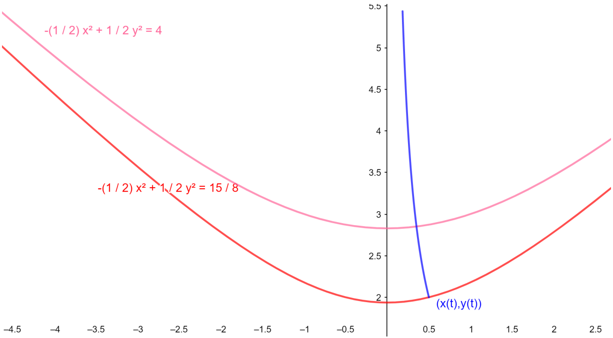


Figura: Dado $\vec{F}(x_1, x_2) = (-x_1, x_2) = \nabla f(x)$ onde $f(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ e $p = (\frac{1}{2}, 2)$. Então a solução $\alpha'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ $\alpha(0) = p$ passa das curvas de nível mais baixas para as mais altas.

Regra da cadeia para aplicações

Prop Compostas de aplicações de ordem C^k são de ordem C^k.

Teorema 18

Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^m \to W \subset \mathbb{R}^n$ *e* $G : W \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *aplicações diferenciáveis. Seja* $H : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *definida como* $H(x) = G \circ F(x)$ *Então:*

$$DH(p) = DG(F(p))DF(p)$$

Prob : Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ respc. $F(p_1, p_2, w) = (\frac{1}{2}\frac{w}{p_1}, \frac{1}{2}\frac{w}{p_2})$ e $g(y_1, y_2) = \frac{1}{2}\ln(y_1) + \frac{1}{2}\ln(y_2)$. Seja $h : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $h(x) = g \circ F(x)$. Calcule $dh(x)$.

Comentários (teorema da função inversa): *Seja* $F : \Omega \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *aplicação de classe* C^1. *Suponha que* $DF(p)$ *é invertível para* $p \in \Omega$. *Então existe uma vizinhança* U *de* p *e uma vizinhança* V *de* $F(p)$ *tais que* $F : U \to V$ *é um difeomorfismo de classe* C^1, *i.e.,* $F : U \to V$ *é bijeção de classe* C^1 *com inversa* $F^{-1} : V \to U$ *de classe* C^1.

Visto que $x = H(x) = F^{-1} \circ F(x)$ temos pela regra da cadeia que $Id = D(F^{-1})(q)DF(p)$ onde $q = F(p)$. Em particular $D(F^{-1})(q) = \big(DF(p)\big)^{-1}$ (compare com Cálculo I).