MAT 0147: Cálculo II Economia (noturno)

Guia 4: Pontos críticos, Hessiano, máximos e mínimos

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra http://www.geogebra.org

Motivação: Estudar máximos e mínimos de funções.

Objetivo:

(1) Motivação de Cálculo I

(2) Máximos e mínimos locais

(3) Matriz Hessiana e polinômio de Taylor de grau 2

(4) Hessiano e o teorema espectral

(5) Critérios de classificação de pontos críticos

(6) Obs: Fórmula de Talylor de ordem maior

(7) Máximos e mínimos absolutos

Motivação de Cálculo I

Em Cálculo I vimos que dado $f : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suave com $p \in (-\epsilon, \epsilon)$, se p era **máximo ou mínimo local interior** então p era ponto crítico (i.e., $f'(p) = 0$).

Obs Porém a função $f(x) = x^3$ indicava que **nem todo ponto crítico era ponto de máximo ou mínimo local** (de fato $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$ e $x = 0$ não era nem máximo nem mínimo).

Isto nos motivou a procurar critérios mais precisos.

se $p \in (-\epsilon, \epsilon)$ é um ponto crítico ($f'(p) = 0$) então:

1. **se $f''(p) > 0$ então p é mínimo local;**
2. **$f''(p) < 0$ então p é máximo local;**

A ideia da prova era o uso da fórmula de Taylor i.e.,

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{1}{2} f''(p)(x-p)^2 + R(x-p)$$

onde $\lim_{x \to p} \frac{R}{(x-p)^2} = 0$

De fato: se $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$ então dividindo a Formula de Taylor por $(x-p)^2$ temos:

$$\frac{f(x) - f(p)}{(x-p)^2} = \frac{1}{2} f''(p) + \frac{R(x-p)}{(x-p)^2} > 0$$

e assim $f(x) > f(p)$ para x póximo a p (p é mínimo local).

Iremos aqui **generalizar tais argumentos** para funções
$f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

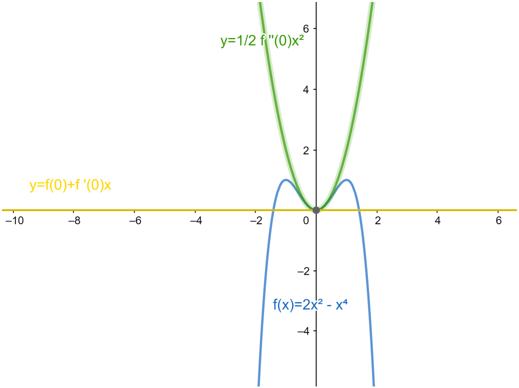


Figura: Neste exemplo de Cálculo I, vemos o gráfico de $f(x) = 2x^2 - x^4$ a qual tem ponto crítico em $p = 0$, e assim com reta tangente $\{y = 0\}$ em p. Para x próximo a p a função f é aproximada por
$h(x) = \frac{1}{2} f''(p)(x - p)^2 = 2x^2$

Máximos e mínimos locais

Sejam U aberto e $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função diferenciável, dizemos que $p \in U$ é ponto **de mínimo local** (interior) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\epsilon(p) \subset U$ temos $f(x) \geq f(p)$.

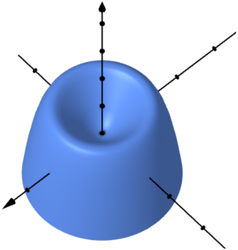


Figura: Dado $f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$ $p = (0,0)$ é ponto de mínimo local de f

Analogamente $q \in U$ é ponto **de máximo local** (interior) se existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x \in B_\epsilon(q) \subset U$ temos $f(x) \leq f(q)$.

Proposição 1

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciável com $p \in U$ sendo ponto de mínimo ou máximo local (interior). Então p é critico, i.e., $\nabla f(p) = 0$.

Dem: Dado $v_p \in T_p\mathbb{R}^m$ considere curva suave $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to U$ tal que $\alpha'(0) = v_p$. Seja $h = f \circ \alpha$. Como p é máximo ou mínimo local, então $t = 0$ é máximo ou mínimo interior de $h = f \circ \alpha$, logo

$$0 = h'(0) = \langle \nabla f(p), \alpha'(0) \rangle$$

Como isto vale para todo $v_p = \alpha'(0)$ concluimos que $\nabla f(p) = 0$.

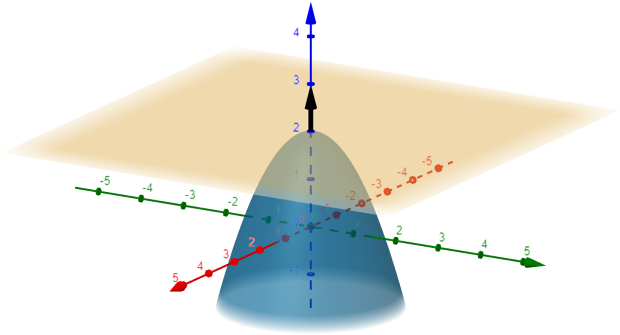


Figura: Dado $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$ $p = (0,0)$ é ponto de máximo interior e assim ponto crítico. Note que o vetor normal do plano tangente é $N = (-\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), -\frac{\partial f}{\partial x_2}(p), 1) = (0,0,1)$ e assim o plano tangente é paralelo ao plano $\{x_3 = 0\}$

Obs: Se de um lado todo ponto de máximo ou mínimo interior é ponto crítico, **nem todo ponto crítico é ponto de máximo ou mínimo local**.

Assim, tal como em Calculo I, precisaremos de critérios mais finos para **classificar pontos críticos**, i.e., determinar se eles são de máximo, mínimos ou sela.

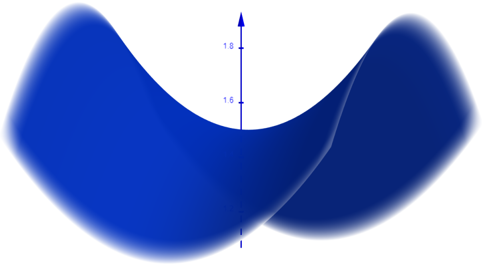


Figura: $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$, e $p = (0,0)$ não é máximo nem mínimo local

Matriz Hessiana e polinômio de Taylor de grau 2

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Como vimos no Guia Resumido 3, $df(p) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma aplicação linear definida como: $df(p) = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \cdots \frac{\partial f}{\partial x_m}(p)]$

Deixando o p variar, temos uma aplicação $df : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Podemos então considerar a derivada da aplicação df ou seja a **derivada segunda de** f, i.e., $\mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(p) = D(df)(p)$

$$\mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(p) = \begin{bmatrix} d\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ \cdots \\ d\frac{\partial f}{\partial x_m}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(p) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_m}(p) \end{bmatrix}$$

A matriz $m \times m$ chamada **matriz Hessiana de** f.

Obs Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Então

$$\mathrm{Hess\,f}(p) = \begin{bmatrix} d\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) \\ d\frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix}$$

Problema 2

Determine o Hess f das $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2$

(b) $f(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_2^2$

(c) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2^2$

(d) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$

Dado uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^3 chamamos

$$P_2(x) = f(p) + df(p)(x-p) + \frac{1}{2}(x-p)^t \mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(p)(x-p)$$

polinômio de Taylor de grau 2 em torno de p

Obs: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Então

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(p) + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 & x_2 - p_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= f(p) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(p)(x_1 - p_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(p)(x_2 - p_2) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p)(x_1 - p_1)(x_2 - p_2) \\
&+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(p)(x_2 - p_2)^2
\end{aligned}
$$

Obs Note que no Prob 2, P_2 em torno de $p = (0,0)$ coincide com a própia função de f.

Ex : Seja $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$ Considerando $p = 0$ temos (pelo Prob 2) que $P_2(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2$

Prob: Seja $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_1^2)(2x_2 - x_2^2)$. Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 em torno $p = (3, -2)$.

Teorema 3 (Fórmula de Taylor de ordem 2)
Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ função de classe C^3. Então:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + df(p)(x-p) \\ &+ \frac{1}{2}(x-p)^t \mathrm{Hess\,f}(p)(x-p) \\ &+ R(x-p) \end{aligned}$$

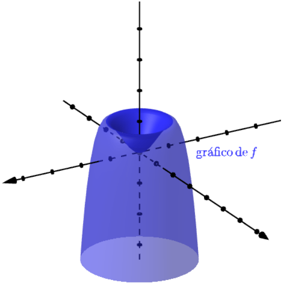
onde $\lim_{x \to p} \frac{R(x-p)}{\|x-p\|^2} = 0$

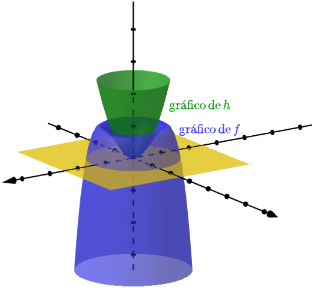
Ex: $f(x) = 0 + 0x_1 + 0x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + x_2^4)$
Considerando $p = 0$

Seja $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)$ Note que $p = (0,0)$ é um ponto de mínimo e assim um ponto crítico, i.e., $\nabla f(p) = (0,0)$ Logo o plano tangente em p é $\{x_3 = 0\}$.

Fórmula de Taylor garante que, **próximo a** $p = (0,0)$ o gráfico de f é aproximado por $h(x) = \frac{1}{2}(x-p)^t \mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(p)(x-p)$

Este **exemplo sugere** que, tal como em Cálculo I, classificar pontos críticos esteja relacionado com a compreensão de $h(x) = \frac{1}{2}(x-p)^t \mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(p)(x-p)$





Hessiano e o teorema espectral

Dado uma matriz A $m \times n$, podemos definir uma nova matriz B $n \times m$ como sendo a **matriz transporta** A^t ou seja $b_{i,j}$ é definido como a_{ji} Por exemplo se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $B = A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
Uma matriz $m \times m$ A é chamada **simétrica** se $A = A^t$

Dado uma função $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^2, temos que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)$ Assim sendo a matriz $Hess\, f(p)$ é simétrica.

Teorema 4 (Espectral)

Seja A uma matriz simétrica $m \times m$. Então existe uma base ortonormal $\{q_i\}$ de $\mathbb{R}^m$ (i.e., $\langle q_i, q_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e $\|q_i\| = 1$) tal que:

1. $Aq_i = \lambda_i q_i$, *i.e.,* q_i *é auto-vetor;*
2. $Q^t AQ = \Lambda$, *onde Q é a matriz com colunas q_i e Λ é a matriz diagonal de auto-valores λ_i.*

Obs: Uma matriz Q cujas colunas formam uma base ortonormal, é chamada matriz ortogonal, e a transformação linear associada é um movimento rígido, i.e., se $R(x) = Qx$ então $\langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle$ e assim $\|Qx\| = \|x\|$.

Obs: Para demonstração vide Strang-Algebra Linear e aplicações

Comentários: Cálculo de auto-vetores $Av = \lambda v$ equivale a $(A - \lambda Id)v = 0$ e tal sistema tem solução não trivial se e somente se $(A - \lambda Id)$ não for invertivel, ou seja se e somente se $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id) = 0$. Vejamos um exemplo: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Passo 1: Encontre os auto-valores, i.e., resolva $p(\lambda) = 0$,

$$0 = p(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 1$$

, i.e., $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

Passo2: Encontre os auto-vetores,i.e, para cada λ_i resolva o sistema

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para $\lambda_1 = 1$ solução é (x_2, x_2), para $\lambda_2 = -1$ solução é $(-x_2, x_2)$. Assim uma base ortonormal de auto-vetores é
$\{q_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), q_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

Problema 5

Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $[Q] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$, $q_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $q_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *a aplicação linear* $Q(x) = [Q]x$ *e* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função* $f(x) = x^t A x = 2x_1 x_2$. *Determine:*

$$f \circ Q(y) = f(y_1 q_1 + y_2 q_2)$$

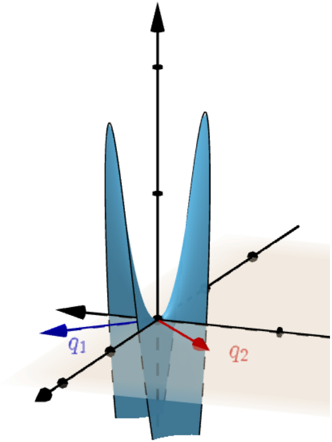


Figura: $f \circ Q(y) = f(y_1 q_1 + y_2 q_2) = y_1^2 - y_2^2$ ou seja *o gráfico da função (não linear) f* é uma rotação do gráfico de $f \circ Q$ (a qual é uma sela de cavalo)

Critérios de classificação de pontos críticos

Teo: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e, $df(p) = 0$) e $\det \mathrm{Hess\,f(p)} \neq 0$

(a) Se todos os auto-valores λ_i de $\mathrm{Hess\,f(p)}$ são **positivos** (i.e., $\lambda_i > 0$) , então p é **mínimo**.

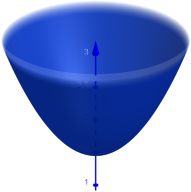


Figura: $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{3}{2}$

Teo: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e, $df(p) = 0$) e $\det \mathrm{Hess\,f(p)} \neq 0$

(b) Se todos os auto-valores λ_i de $\mathrm{Hess\,f(p)}$ são **negativos** (i.e., $\lambda_i < 0$) , então p é **máximo**.

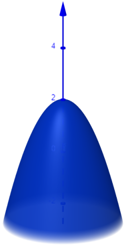


Figura: $f(x) = -x_1^2 - x_2^2 + 2$

Teo: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^3. Suponha que $p \in U$ seja ponto crítico (i.e, $df(p) = 0$) e $\det \mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(\mathrm{p}) \neq 0$

(c) Se parte dos auto-valores λ_i de $\mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(\mathrm{p})$ são positivos, e a outra parte negativa, então p é **sela**.

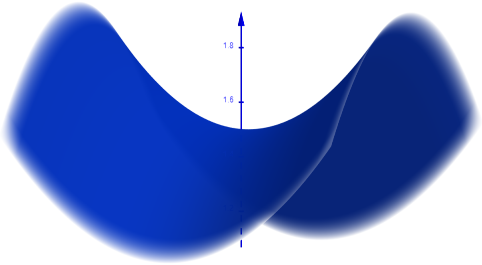


Figura: $f(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{3}{2}$

Ideia da prova

Para simplificar a discussão vamos supor $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p = (0,0)$, $f(0,0) = 0$ e $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$ auto-valores.
Pela formula de Taylor temos:

$$f(x) = \frac{1}{2}(x)^t \mathrm{Hess\, f}(p)(x) + R$$

Pelo teorema Espectral temos

$$Q^t \mathrm{Hess\, f}(p)(x) Q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

onde $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}$ é a matriz ortogonal cujas colunas são autovetores (ortonormais) q_1, q_2 de $\mathrm{Hess\, f}(p)(x)$ associados a λ_1 e λ_2.
Definindo y_i como $x = y_1 q_1 + y_2 q_2$, e substituindo nas duas equações acima temos:

$$
\begin{aligned}
f(y_1q_1 + y_2q_2) &= \frac{1}{2}(y_1q_1 + y_2q_2)^t \mathrm{Hess\,f}(p)(y_1q_1 + y_2q_2) \\
&+ R \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^t \\ q_2^t \end{bmatrix} \mathrm{Hess\,f}(p) \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&+ R \\
&= \frac{1}{2} y^t Q^t \mathrm{Hess\,f}(p) Q y + R \\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + R \\
&= \frac{1}{2}(\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2) + R
\end{aligned}
$$

Dividindo por $\|x\|^2 = \|y\|^2$ temos:

$$
\frac{f(x)}{\|x\|^2} \geq \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{R}{\|x\|^2} > 0
$$

para x próximo a $p = (0,0)$ ou seja $p = (0,0)$ é **mínimo.**

Entendido o fenômeno, podemos desenvolver um critério mais fácil de ser implementado (no qual não será necessário calcular os auto-valores explicitamente, mas apenas ter uma maneira de detectar seus sinais).

Iremos explorar o **caso particular de dimensão dois.**

Proposição 6

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* C^3*. Suponha que* $p \in U$ *seja ponto crítico (i.e,* $df(p) = 0$*) e* $\det \mathrm{Hess}\, \mathrm{f(p)} \neq 0$

(a) Se $\det \mathrm{Hess}\, \mathrm{f(p)} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) > 0$ então p é **mínimo**.

(b) Se $\det \mathrm{Hess}\, \mathrm{f(p)} > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(p) < 0$ então p é **máximo**.

(c) Se $\det \mathrm{Hess}\, \mathrm{f(p)} < 0$ então p é **sela**.

Comentário (prova da proposição): A demonstração da proposição segue como caso particular do Teorema anterior e do Teorema *critério positivo definido* comentado a seguir.

Porém também é possível aplicar o Teorema anterior e o seguinte argumento geométrico: suponha que hipótese (a) seja verificada. Como $\det \mathit{Hess}\, f(0) = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ temos $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ Assim pela demonstração do teorema anterior, o gráfico S da função $h(x) = x^t \mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(0) x$ é um parabolóide elíptico para cima (se $\lambda_i > 0$) ou para baixo se ($\lambda_i < 0$). Para decidir qual das opções observe que o gráfico de $h(x_1, 0) = x_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0)$ descreve a parabola $C = S \cap \{x_2 = 0\}$. Como esta parabola é para cima (pois por hipótese $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(0) > 0$), o gráfico de S é para cima. Logo $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ e pelo Teorema anterior, 0 é ponto de mínimo. Os outros itens se provam de forma similar.

Comentário (critério positivo definido): A proposição anterior é relacionada ao seguinte resultado de Algebra Linear.

Teorema 7

Considere uma matriz simétrica A. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. *Os auto-valores de A são todos positivos (i.e, $\lambda_i > 0$);*
2. $x^t Ax > 0, \quad \forall x \neq 0$ *(A é positiva-definida);*
3. $\det A_k > 0$ *para todas as submatrizes A_k a esquerda, i.e as matrizes $k \times k$ definidas como $(a_k)_{ij} = a_{ij}$ para $0 \leq i \leq k$ e $0 \leq j \leq k$.*

Por exemplo, se $m = 2$ e $A = \mathrm{Hess}\,\mathrm{f}(0)$, então $A_1 = [\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(0)]$ e $A_2 = \mathrm{Hess}\,\mathrm{f}(0)$, e assim re-obtemos as hipóteses do item (a) da proposição anterior.

Obs: Para demonstração vide Strang-Álgebra Linear e aplicações

Problema 8

Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *função definida como* $f(x_1, x_2) = 2(2x_1 - x_1^2)(2x_2 - x_2^2)$. *Determine e classifique os pontos críticos.*

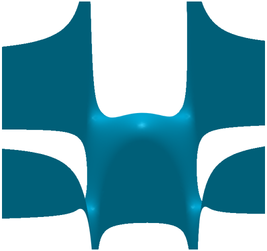


Figura: temos $(1, 1)$ como ponto de máximo local, e os pontos $(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)$ são pontos de sela

Comentário (curvatura): Quando temos $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ função de classe C^3 onde $(0,0) \in U$ é ponto crítico, temos que o plano tangente do gráfico em $(0,0,f(0,0))$ é paralelo a $\{x_3 = 0\}$. Neste caso, $K(q) = \det \mathrm{Hess}\, \mathrm{f}(0,0) = \lambda_1 \lambda_2$ é chamada **Curvatura de Gauss** no ponto $q = (0,0,f(0,0))$. Assim se $K(q) > 0$ o gráfico de f é aproximado por uma paraboloide elíptico e se $K(q) < 0$ é aproximado por um paraboloide hiperbolico (*sela de cavalo*).

Mais geralmente, dado um gráfico S qualquer e $q \in S$ podemos, após movimento rígido, descreve-lo (pelo menos localmente) como um novo gráfico de uma função h em relação ao plano plano tangente $T_q S$. Assim o conceito de curvatura de Gauss (presente na área da matemática chamada *Geometria Diferencial*) pode ser definido para qualquer ponto $q \in S$ bem como sua interpretação geométrica.

Obs: Fórmula de Talylor de ordem maior

Para facilitar a discussão vamos nos limitar a um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Seja $v = (v_1, v_2)$ vetor em $\mathbb{R}^2$. Considerando o conjunto de todas as funções de classe C^k em U (denotada por $C^k(U)$) podermos criar uma aplicação linear $T : C^k(U) \to C^{k-1}(U)$ definida como

$$T(f) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Denotaremos $v \cdot \nabla = T$ e assim

$$v \cdot \nabla = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Com esta notação

$$
\begin{aligned}
(v\cdot\nabla)(w\cdot\nabla)f(p) &= (v_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial}{\partial x_2})(w_1\frac{\partial}{\partial x_1}+w_2\frac{\partial}{\partial x_2})f \\
&= v_1 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(p) + v_1 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p) \\
&+ v_2 w_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(p) + v_2 w_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}(p) \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_1}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_2}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\
&= v^t \mathrm{Hess\,f}(p) w
\end{aligned}
$$

Em particular $\frac{1}{2}v^t\mathrm{Hess\,f}(p)v = \frac{1}{2}(v\cdot\nabla)^2 f(p)$.

Teorema 9

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *função de classe* C^{k+1}, $p \in U$ *e* $v = (x - p)$.
Então:

$$
\begin{aligned}
f(v+p) &= f(p) + (v \cdot \nabla) f(p) \\
&+ \frac{1}{2}(v \cdot \nabla)^2 f(p) \\
&+ \frac{1}{3!}(v \cdot \nabla)^3 f(p) \\
&+ \frac{1}{4!}(v \cdot \nabla)^4 f(p) \\
&+ \cdots \\
&+ \frac{1}{k!}(v \cdot \nabla)^k f(p) \\
&+ R(v)
\end{aligned}
$$

Onde $\lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{\|v\|^k} = 0$

Máximos e mínimos absolutos

Em certos casos **particulares** é possível até determinar máximos e mínimos absolutos. Para isto usaremos o seguinte resultado:

Teorema 10

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $K \subset U$ um conjunto fechado e limitado (ou seja fechado tal que $K \subset B_R(0)$). Então a função restrita $f|_K$ possui um valor máximo e um valor mínimo.

Para os casos particulares que abordaremos neste momento K terá interior não vazio e o bordo ∂K será união de curvas "bem comportadas". Por exemplo $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x) \leq c\}$ e $\partial K = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x) = c\}$ onde $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua.

O teorema então sugere o seguinte **algoritmo**:

Passo 1: Determinar pontos críticos no interior de K;

Passo 2: determinar candidatos a máximo ou mínimos de $f|_{\partial K}$ (ex, via parametrizações ou multiplicadores de Langrange)

Passo 3: comparar os candidatos determinados nos passos anteriores.

Obs: Lembre, estaremos lidando com **problemas particulares**, onde o passo 1 e 2 são possíveis de serem calculados (ex, se eles são finitos). Nestes casos particulares **não será necessário** classificar os pontos críticos (e calcular $\mathrm{Hess}\,\mathrm{f}$).

Ex: Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x_1^2 + x_1 + x_2^2 - 2$ e $K = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x) = x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$. Determine os valores de máximos e mínimos absolutos de $f : K \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Passo 1: A solução do problema $\nabla f(x) = (0,0)$ para x no interior de K é $x = (-\frac{1}{4}, 0)$

Passo 2: Para determinar candidatos a máximo ou mínimos de $f|_{\partial K}$ usaremos neste exemplo multiplicadores de Langrange.

$$\begin{aligned} (4x_1 + 1, 2x_2) = \nabla f(x) &= \lambda \nabla g(x) = \lambda(2x_1, 2x_2) \\ 4 &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

Cujas soluções são: $(2,0), (-2,0), (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{15}}{2})$

Passo 3: Avaliando f nos pontos obtidos nos Passos 1 e Passso 2 concluimos: $-\frac{17}{8} = f(-\frac{1}{4}, 0)$ é valor mínimo absoluto, e $f(2,0) = 8$ valor máximo absoluto.

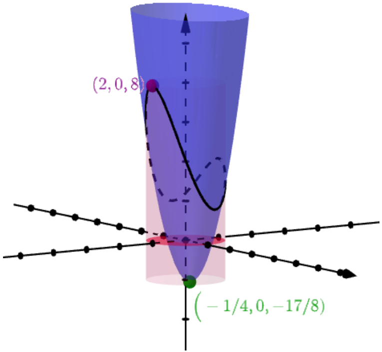


Figura: Note que o ponto $(2, 0)$ é um ponto de máximo global no bordo e não é crítico.