2^0 Lista de Exercício: MAT0146, turma 21

Cálculo Diferencial e Integral I para Economia (1^0 semestre 2024)

Referências principais(nas quais a lista foi baseada):

1. J. Stewart ,*Cálculo I* Pioneira Thomson Learning, 4 5 Edição;
2. J. E. Weber, *Matemática para Economia e Administração*, 2 Edição;
3. C . P. Simon L Blume, mathematics for economists, : W. W. Norton & Company;
4. S.T. Tan, *Matemática Aplicada a Administração e Economia*, Cengage Learning;

5 Integração, área e teorema fundamental

5.1 Problemas:

Problema 5.1. Esboce a região A limitada pelas curvas $y = -x^2 + 4x$ e $y = x^2$ e encontre a area de A.

Problema 5.2. Esboce a região limitada pela parabola $y^2 = 2x + 6$ e pela reta $y = x - 1$, decida se é melhor integrar em relação a x ou y e calcule a área da região.

Problema 5.3. Esboce a região limitada pelas curvas dadas. Decida quando integrar em relação a x ou a y e calcule a área da região.

(1) $y = x + 1$, $y = 9 - x^2$, $x = -1$, $x = 2$.

(2) $y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$

(3) $x = 2y^2$, $x + y = 1$

(4) $x = 1 - y^2$ $x = y^2 - 1$

Problema 5.4. (1) $\frac{d}{dx}\int_x^3 \sqrt{\sin(t)}\,dt$

(2) $\frac{d}{dx}\int_{-x}^{x} \frac{1}{3+t^2}\,dt$

(3) $\frac{d}{dx}\int_1^{x^3} \sqrt[3]{t^2+1}\,dt$

(4) $\frac{d}{dx}\int_2^{\tan(x)} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Problema 5.5. Uma função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ contínua por partes é chamada *função freqüência* se :

(a) $f \geq 0$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

A probabilidade de um evento x ocorrer em um intervalo $[a,b]$ é definida por

$$P(a < x < b) := \int_a^b f(x)\,dx$$

Num estabelecimento de autopeças, a proporção de encomendas atendidas por dia tem uma função de freqüência dada por $f(x) = 20(x^3 - x^4)$ para $x \in [0,1]$ e $f(x) = 0$ para $x \notin$[0,1]. Qual a probabilidade de se atender menos de 20 por cento das encomendas num dia?

5.2 Respostas da Parte 1

Problema 5.1: $\frac{8}{3}$.

Problema 5.2: 18

Problema 5.3

(1) $19,5$

(2) 72

(3) 9/8

(4) $8/3$

Problema 5.4

(1) $-\sqrt{\sin(x)}$

(2) $\frac{2}{3+x^2}$

(3) $3x^2\sqrt[3]{x^6+1}$

(4) 1

Problema 5.5: $20(\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5})|_0^{0.2}=0,00672$

6 Aplicações da integral na economia

6.1 Problemas

Problema 6.1. Seja $q = f(p)$ a função demanda onde p é o preço e q a quantidade. A função demanda é positiva, em geral decrescente e em geral existe M (preço máximo) tal que $f(M) = 0$. O *excedente do consumidor* (a partir do preço p_0) é definido como

$$ec := \int_{p_0}^{M} f(p)\, dp.$$

(a) Seja $p_0 < \cdots < p_n = M$ uma partição por preços do intervalo $[p_0, M]$ e defina $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$. Defina $ec(p_i)$ como sendo o gasto de um consumidor que consome $f(p_i)$ produtos ao preço $p_i + \Delta p_i$ menos o gasto de um consumidor que consome $f(p_i)$ produtos ao preço p_i. Em outras palavras, $ec(p_i)$ mede a diferença do gasto de um consumidor que, apesar do aumento de preço Δp_i no preço p_i, continua consumindo a mesma quantidade de produtos (i.e., $f(p_i)$) com o gasto do consumidor que consome $f(p_i)$ produtos a um preço p_i. Verifique que para uma partição com Δp_i pequenos o excedente do consumidor pode ser aproximado por $\sum_i ec(p_i.)$

(b) Sejam $p = f^{-1}(q)$ a inversa da função demanda e $q_0 = f(p_0)$. Verifique que

$$ec = \int_{0}^{q_0} f^{-1}(q)\, dq - p_0 q_0.$$

(c) Seja $p = 32 - 4q - q^2$ a inversa da função demanda. Ache o excedente do consumidor a partir de $p_0 = 27$.

Problema 6.2. Seja $p = 39 - q^2$ a inversa da função demanda. Ache o excedente do consumidor se

(a) $q_0 = \frac{5}{2}$.

(b) O bem é gratuito, i.e., $p_0 = 0$.

Problema 6.3. Seja $q = g(p)$ a função que representa a quantidade q de um produto que pode ser ofertada por uma empresa de acordo com o preço p. A função oferta é positiva, em geral crescente e em geral existe m (preço

mínimo) tal que $g(m) = 0$. O *excedente do produtor* (até do preço p_f) é definido como
$$ep := \int_m^{p_f} g(p)\, dp.$$

(a) Seja $m = p_0 < \cdots < p_n = p_f$ uma partição por preços do intervalo $[m, p_f]$ e defina $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$. Defina $ep(p_i)$ como sendo o ganho do produtor que oferta $g(p_{i+1})$ produtos ao preço p_{i+1} menos o ganho de um produtor que consegue oferecer $g(p_{i+1})$ produtos ao preço menor $p_i = p_{i+1} - \Delta p_i$. Verifique que para uma partição com Δp_i pequenos o excedente do produtor pode ser aproximado por $\sum_i ep(p_i.)$

(b) Sejam $p = g^{-1}(q)$ a inversa da função oferta e $q_f = g(p_f)$. Verifique que
$$ep = p_f q_f - \int_0^{q_f} g^{-1}(q)\, dq.$$

(c) Seja $p = (q+2)^2$ a inversa da função oferta. Ache o excedente do produtor até o preço $p_f = 25$.

Problema 6.4. Seja $p = \sqrt{9+q}$ a inversa da função oferta. Ache o excedente do produtor com $q_f = 7$.

Problema 6.5. A quantidade demandada q_{conc} e o preço correspondente p_{conc}, sob condições de concorrência perfeita, são determinadas pela inversa da demanda $p = 36 - q^2$ e pela inversa da oferta $p = 6 + \frac{q^2}{4}$, i.e., o ponto (q_{conc}, p_{conc}) esta na interseção da curva demanda com a curva oferta. Determine os correspondentes excedente do consumidor e produtor.

Problema 6.6. Sejam $p = 20 - 3q^2$ a função inversa da demanda e $p = 2q^2$ a função inversa da oferta. Ache o excedente do consumidor e excedente do produtor sob condições de concorrência perfeita.

Problema 6.7. Sejam $C(R)$ a função consumo, $P(R)$ a função poupança, $\frac{dC}{dR}$ a propensão marginal a consumir e $\frac{dP}{dR}$ a propensão marginal a poupar. Suponha que $R = C + P$. Seja $1/3$ a propensão marginal a poupar. Suponha que quando a renda é zero o consumo é 11. Ache a função consumo.

Problema 6.8. Sejam $K(t)$ a formação de capital, $I(t) := \frac{dK}{dt}$ o fluxo de investimento líquido. Se o fluxo de investimento líquido é $I(t) = 15t^{1/4}$ e o estoque de capital inicial em $t = 0$ é 30, calcule a função formação de capital.

6.2 Respostas

Problema 6.1: (c) $\frac{8}{3}$.

Problema 6.2

(a) $\frac{31}{4}$

(b) $26\sqrt{13}$

Problema 6.3: (c) 36

Problema 6.4: $\frac{10}{3}$

Problema 6.5:

Neste caso o ponto (q_{conc}, p_{conc}) coincide com o ponto (q_0, p_0) do excedente do consumidor e com o ponto (q_f, p_f) do excedente do produtor. Assim sendo temos que excedente do consumidor é $32\sqrt{6}$ e o excedente do produtor é $8\sqrt{6}$.

Problema 6.6: $ec = 16$, $ep = \frac{32}{3}$

Problema 6.7: $C = \frac{2}{3}R + 11$.

Problema 6.8: $K(t) = 12t^{5/4} + 30$.

7 Mudança de variáveis e integração por partes

7.1 Problemas

Problema 7.1. Calcule:

(1) $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

(2) $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x)\cos(x)\,dx$

(3) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx$

(4) $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\,dx$

Problema 7.2. Calcule

(1) $\int_1^2 t^2\sqrt{t^3+1}\,dx$

(2) $\int_0^1 \frac{(y^2+2y)}{\sqrt[3]{y^3+3y^2+4}}\,dx$

(3) $\int_0^{15} \frac{w}{(1+w)^{\frac{3}{4}}}\,dw$

(4) $\int_{-2}^5 |x-3|\,dx$

(5) $\int_{-1}^1 \sqrt{|x|-x}\,dx$

(6) $\int_0^3 (x+2)\sqrt{x+1}\,dx$

(7) $\int_1^2 \frac{x^3+2x^2+x+2}{(x+1)^2}\,dx$

(8) $\int_0^1 \sin(\pi x)\cos(\pi x)\,dx$

Problema 7.3. Utilizando o teorema do valor médio e o teorema fundamental do Cálculo I prove que se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua então existe $c\in(a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

Problema 7.4. Calcule:

(1) $\int x \exp(x)\, dx$

(2) $\int \ln(x)\, dx$

(3) $x^2 \sin(x)\, dx$

(4) $\int \frac{2x}{(x+1)^2}\, dx$

(5) $\int \tan(x)\, dx$

(6) $\int \sec(x)\, dx$

(7) $\int \cos^2(x)\, dx$

(8) $\int \sin^2(x)\, dx$

(9) $\int \cos^3(x)\, dx$

(10) $\int \sin^3(x)\, dx$

(11) $\int \sec^4(x)\, dx$

Problema 7.5. Calcule:

(1) $\int \frac{x \exp(x)}{(1+x)^2}\, dx$

(2) $\int x^2 \exp(x)\, dx$

(3) $\int t \ln(t)\, dt$

(4) $\int \exp(x)(x+1)^2\, dx$

(5) $\int \frac{x+1}{(x+1)^2+4}\, dx$

(6) $\int \exp(x) \cos(x)\, dx$

(7) $\int x^2 \exp(-x)\, dx$

(8) $\int \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}\, dx$

7.2 Respostas

Problema 7.1

(1) $\frac{15}{8}$

(2) $\frac{1}{4}$

(3) $\frac{116}{15}$

(4) $\frac{16}{3}$

Problema 7.2

(1) $\frac{2}{9}(27 - 2\sqrt{2})$

(2) $2 - \sqrt[3]{2}$

(3) $\frac{104}{5}$

(4) $\frac{29}{2}$

(5) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

(6) $\frac{256}{15}$

(7) $\frac{11}{6}$

(8) 0

Problema 7.3: Defina $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Pelo teorema do valor médio existe c tal que

$$\begin{aligned} F'(c) &= \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \\ &= \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a} \end{aligned}$$

Por outro lado, o teorema fundamental do Cáculo I implica que

$$F'(c) = f(c)$$

O resultado segue então das equações acima.

Problema 7.4

(1) $x\exp(x) - \exp(x) + C$

(2) $x\ln(x) - x + C$

(3) $-\cos(x)x^2 + 2x\sin(x) + 2\cos(x) + C$

(4) $2\ln|x+1| + \frac{2}{|x+1|} + C$

(5) $-\ln|\cos(x)| + C$

(6) $\ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$

(7) $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$

(8) $\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$

(9) $\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + C$

(10) $-\cos(x) + \frac{\cos^3(x)}{3} + C$

(11) $\frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + C$

Problema 7.5:

(1) $\frac{exp(x)}{1+x} + C$

(2) $\exp(x)(x^2 - 2x + 2) + C$

(3) $\frac{1}{2}(t^2\ln(t) - \frac{1}{4}t^2 + C$

(4) $\exp(x)(x^2 + 1) + C$

(5) $\frac{1}{2}\ln((x+1)^2 + 4) + C$

(6) $\frac{1}{2}\exp(x)(\sin(x) + \cos(x)) + C$

(7) $-\exp(-x)(x^2 + 2x + 2) + C$

(8) $2(x+1)^{1/2}(\ln(x+1) - 2) + C$