MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 4 : Derivada: Máximos, mínimos e gráficos

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra http://www.geogebra.org

Objetivo: Por meio da compreensão de gráficos de funções, fixar conceitos e resultados fundamentais sobre máximos e mínimos, derivada primeira e derivada segunda.

(1) Máximos e mínimos

(2) Gráficos: derivada primeira

(3) Gráficos: derivada segunda

Máximos e mínimos

Definição 1

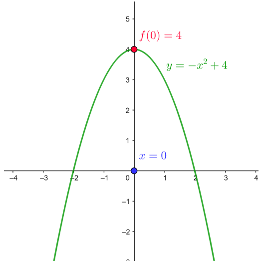
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Então um ponto $p \in I$ é chamado um **ponto de máximo absoluto (ou máximo global)** se:

$$f(p) \geq f(x), \ \ \forall x \in I$$

$f(p)$ é chamado **valor máximo.**

Exemplo 2

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = -x^2 + 4$. Então $x = 0$ é ponto de máximo e $f(0) = -4$ é valor máximo absoluto.



Definição 3

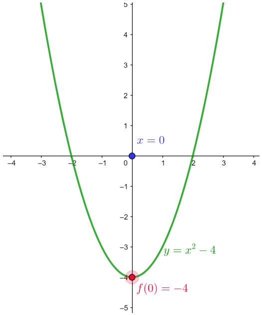
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Então um ponto $p \in I$ é chamado um **ponto de mínimo absoluto (ou mínimo global)** se:

$$f(p) \leq f(x), \;\; \forall x \in I$$

$f(p)$ é chamado **valor mínimo.**

Exemplo 4

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido como $f(x) = x^2 - 4$. Então $x = 0$ é ponto de mínimo e $f(0) = -4$ é valor mínimo.



Definição 5

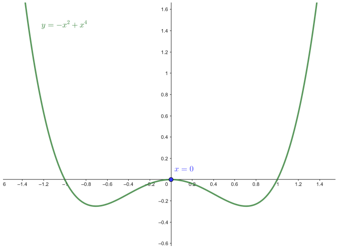
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Então um ponto $p \in I$ é chamado um **ponto de máximo local** se:

$$f(p) \geq f(x), \quad x \in (p - \epsilon, p + \epsilon) \cap I$$

ou seja para x **próximo** a p.

Exemplo 6

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = -x^2 + x^4$. Então $x = 0$ é ponto de máximo local.



Definição 7

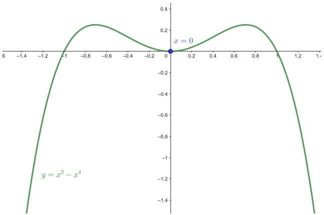
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Então um ponto $p \in I$ é chamado um **ponto de mínimo local** se:

$$f(p) \leq f(x), \quad x \in (p - \epsilon, p + \epsilon) \cap I$$

ou seja para x **próximo** a p.

Exemplo 8

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 - x^4$. Então $x = 0$ é ponto de mínimo local.



Teorema 9

*Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função **continua** em um intervalo **fechado** $[a, b]$. Então existe (pelo menos) um ponto de **mínimo** e (pelo menos) um ponto de **máximo absolutos**.*

Obs: Pontos de máximos e mínimos globais podem acontecer no **interior** (a, b) ou no **bordo** (i.e., $x = a$ ou $x = b$).

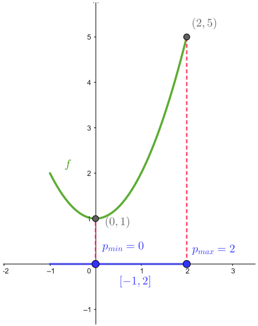


Figura: $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2 + 1$

Proposição 10

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em (a, b) e contínua em $[a, b]$. Suponha que:

- *p é um ponto **no interior** (ou seja $p \in (a, b)$)*
- *p é um ponto de **máximo ou mínimo local**.*

*Então p é um ponto **crítico** ou seja*

$$\frac{d}{dx} f(p) = 0.$$

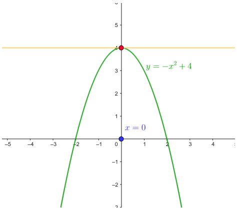


Figura: $f(x) = -x^2 + 4$, $\frac{df}{dx}(0) = 0$

Obs: A demonstração da Proposição 10 seguirá da Proposição 12.
Obs: Condição anterior é uma condição necessária mas não suficiente. **Um ponto p pode ser crítico e não ser nem máximo, nem mínimo.**

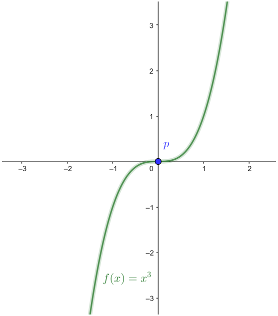


Figura: $f(x) = x^3$, $\frac{df}{dx}(0) = 0$ mas $p = 0$ não é nem máximo nem mínimo local.

Problema 11

Encontre os pontos e valores de máximos e mínimos globais da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ *com domínio* $I = [-\frac{1}{2}, 4]$.

Obs: Para resolver o problema iremos desenvolver um **algorítmo** baseado no Teorema 9 e na Proposição 10

Sol: Como o intervalo é fechado sabemos pelo Teorema 9 que existe máximo e mínimo absoluto.

Passo 1: Procuramos **candidatos** a máximo e mínimo absoluto **no interior**. Para isto resolvemos $f'(x) = 0$ e avaliamos os candidatos encontrados. $0 = f'(x) = x(3x - 6)$ temos $x = 0$ e $x = 2$. Assim $f(0) = 1$ e $f(2) = -3$.

Passo 2: Procuramos **candidatos** a máximo e mínimos absolutos **no bordo**. Para tanto avaliamos f nos extremos do invervalo. $f(-1/2) = 1/8$ e $f(4) = 17$

Passo 3 Comparamos aqui os valores obtidos no Passo 1 e Passo 2
$f(0) = 1$; $f(2) = -3$ **(mínimo absoluto)**
$f(-1/2) = 1/8$; $f(4) = 17$ **(máximo absoluto)**

Resposta: Ponto(s) de mínimo(s) absoluto(s): $x = 2$, **o valor** mínimo absoluto é $y = -3$ Ponto(s) de máximo(s) absoluto(s): $x = 4$ **o valor** máximo absoluto é $y = 17$.

Gráficos: derivada primeira

Proposição 12

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *função de classe* $C^1(a, b)$ *e* $p \in (a, b)$;

(a) *Se* $f'(p) > 0$ *então* f *é estritamente* ***crescente*** *em* $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ *ou seja próximo a* p.

(b) *Se* $f'(p) < 0$ *então* f *é estritamente* ***descrescente*** *em* $(p - \epsilon, p + \epsilon)$ *ou seja próximo a* p.

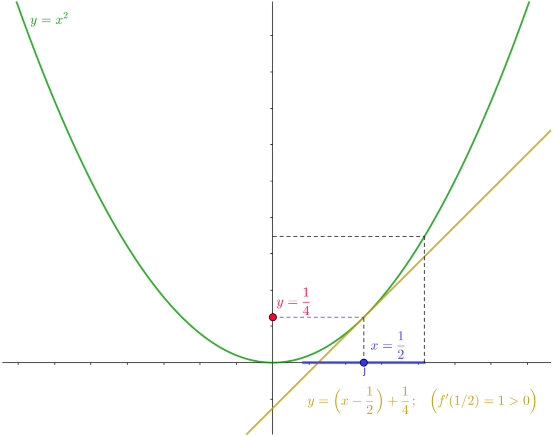


Figura: $f'(1/2) > 0$ implica que a função é crescente em uma vizinhança de $x = 1/2$.

Dem: do Teorema 12

Vamos supor que $f'(p) > 0$ (i.e, hipótese de (a)). Por continuidade temos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\forall x_0 \in [p-\epsilon, p+\epsilon]$ temos $f'(x_0) > 0$ Temos pela **Expansão de Taylor de Ordem 1** $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R$ onde $\lim_{x\to x_0} \frac{R}{x-x_0} = 0$. Assim

$$f(x) - f(x_0) = h(x)$$

onde $h(x) = f'(x_0)(x - x_0) + R$. Como $\lim_{x\to x_0} \frac{R}{x-x_0} = 0$, concluimos que existe $\delta_{x_0} > 0$ tal que para $x \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0})$ temos: $\frac{h(x)}{x-x_0} = f'(x_0) + \frac{R}{x-x_0} > f'(x_0) - \frac{f'(x_0)}{2} > 0$. Assim:

$$f(x) - f(x_0) = h(x) > 0 \text{ para } x \in (x_0, x_0 + \delta_{x_0})$$

A arbitrariedade de x_0 implica que f é crescente em $(p-\epsilon, p+\epsilon)$.
A demonstração do item (b) é análoga.

Corolario 13

Seja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *função* $C^1(a,b)$. *Então*

1. *Se* $f'(x)>0$ *então* f *é estritamente* ***crescente***.
2. *Se* $f'(x)<0$ *então* f *é estritamente* ***descrescente***.

Teorema 14 (Teorema da função inversa)

Sejam $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ *função* $C^1(a,b)$ *e* $(c,d)=f(a,b)$ *(imagem). Suponha que* $f'(x)\neq 0$ $\forall x$. *Então* f *admite inversa* C^1 *ou seja, existe uma função* $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ *de classe* $C^1(c,d)$ *tal que*

$$\begin{aligned} f^{-1}\circ f(x) &= x \\ f\circ f^{-1}(y) &= y. \end{aligned}$$

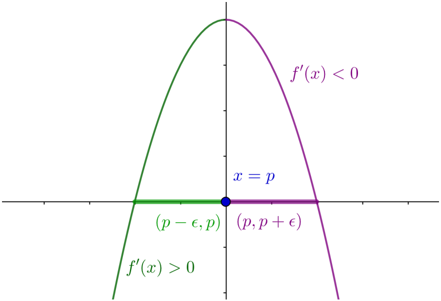
Além disto

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y_0)=\frac{1}{\frac{d}{dx}f(x_0)}$$

Proposição 15

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *função de classe* $C^1(a, b)$ *e* $p \in (a, b)$*.*
Suponha:

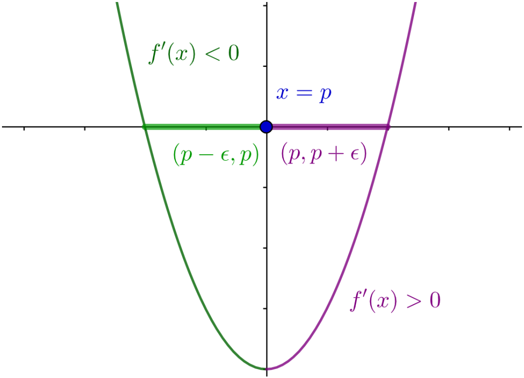
(a) $f'(x) > 0$ *para* $x \in (p - \epsilon, p)$ *e* $f'(x) < 0$ *para* $x \in (p, p + \epsilon)$ *então* p *é* ***ponto de máximo local****.*



Proposição 16

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *função de classe* $C^1(a, b)$ *e* $p \in (a, b)$.
Suponha:

(b) $f'(x) < 0$ *para* $x \in (p - \epsilon, p)$ e $f'(x) > 0$ *para* $x \in (p, p + \epsilon)$ *então* p *é* ***ponto de míximo local.***



Prob: Seja $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

(a) Determine os pontos críticos ($f'(p) = 0$)

(b) Determine intervalos onde f cresce e descresce.

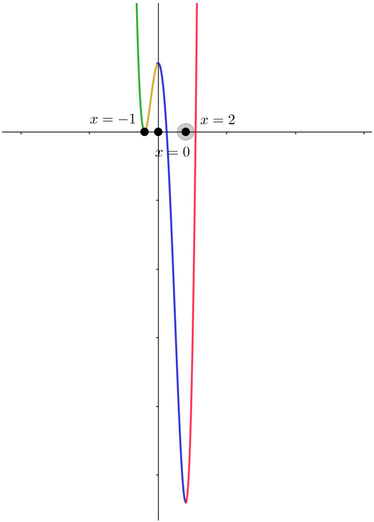
(c) Determine pontos de máximo e mínimos locais.

(d) Esboce o gráfico de f.

$f'(x) = 12x(x-2)(x+1)$ Temos como pontos críticos: $-1, 0, 2$.

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$12x$	(-)	(-)	(+)	(+)
$(x-2)$	(-)	(-)	(-)	(+)
$(x+1)$	(-)	(+)	(+)	(+)
$f'(x)$	(-)	(+)	(-)	(+)
$f(x)$	descresce	cresce	descresce	cresce

Em particular em $x = -1$ é um mínimo local, $x = 0$ é o máximo local, $x = 2$ é um mínimo local.



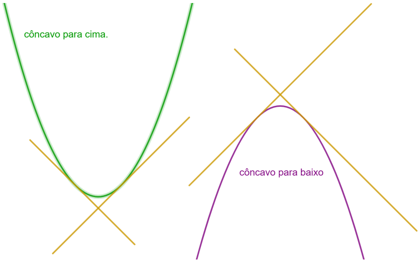
$x = -1$
$x = 2$
$x = 0$

Gráficos: derivada segunda

Definição 17

Uma função $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(a, b)$ é chamada

1. **côncava para cima** se o gráfico de f está sempre acima das retas tangentes.
2. **côncava para baixo** se o gráfico de f está sempre abaixo das retas tangentes.



Obs: Concavidade e (de)crescimento **não são** equivalentes!

Proposição 18

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ função de classe $C^2(a, b)$.

(a) *Se $f''(x) > 0$ então f é* ***côncava para cima****.*

(b) *Se $f''(x) < 0$ então f é* ***côncava para baixo****.*

Obs: Prova seguirá ideias da prova da Proposição 19.

Proposição 19

Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ função de classe $C^2(a, b)$ e $p \in (a, b)$ um ponto crítico, ou seja $f'(p) = 0$ Então

(a) *Se $f''(p) > 0$ então p é **ponto de mínimo local**;*

(b) *Se $f''(p) < 0$ então p é **ponto de máximo local**.*

Ex: Seja $f(x) = -\cos(x) + x^4$. Temos que $f'(x) = \sin(x) + 4x^3$ e $f''(x) = \cos(x) + 12x^2$. Logo $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 1 > 0$
Concluimos pela Proposição 19 que o ponto crítico $x = 0$ é mínimo local.

Dem Proposição 19: Pela **Fórmula de Taylor de ordem 2**

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2 + R(x)$$

onde $\lim_{x \to p} \frac{R(x)}{(x-p)^2} = 0$
Vamos supor que $f'(p) = 0$ e $f''(p) > 0$ (i.e., hipótese de (a)).
Assim

$$f(x) - f(p) = h(x)$$

onde $h(x) = \frac{1}{2}f''(p)(x-p)^2 + R(x)$. Visto que $\lim_{x \to p} \frac{R(x)}{(x-p)^2} = 0$ podemos concluir que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$ $(x \neq p)$ temos:

$$\frac{h(x)}{(x-p)^2} = \frac{1}{2}f''(p) + \frac{R(x)}{(x-p)^2} > \frac{1}{2}f''(p) - \frac{1}{4}f''(p) > 0$$

Assim

$$f(x) - f(p) = h(x) > 0$$

ou seja p é um ponto mínimo local. Demonstração (b) é análoga.

Prob: Seja $f(x) = x^4 - 4x^3$.

(a) Determine os pontos críticos ($f'(p) = 0$)

(b) Determine intervalos onde f cresce e descresce.

(c) Determine pontos de máximo e mínimos locais.

(d) Detemine os intervalos onde f é concava para cima e para baixo

(e) Esboce o gráfico de f.

solução:

Iniciemos com os itens (a),(b), (c)

$f'(x) = x^2(4x - 12)$. Assim os pontos críticos são: $0, 3$.

	$x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
x^2	(+)	(+)	(+)
$(4x - 12)$	(-)	(-)	(+)
$f'(x)$	(-)	(-)	(+)
$f(x)$	descresce	decresce	cresce

Assim $x = 3$ é um ponto de mínimo local.

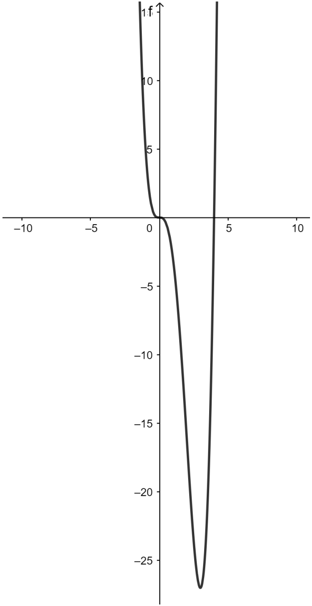
Para o item (d) observamos:

$f''(x) = 12x(x-2)$. Assim soluções de $f''(x) = 0$ são: $0, 2$.

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x$
$12x$	(-)	(+)	(+)
$(x-2)$	(-)	(-)	(+)
$f''(x)$	(+)	(-)	(+)
$f(x)$	conc. cima	conc. baixo	conc. cima

Juntando as 2 tabelas podemos montar uma nova tabela, que contenha informações sobre crescimento/descrescimento e concavidades.

	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 3$	$3 < x$
crescimento	descresce	decresce	descresce	cresce
concavidade	conc. cima	conc. baixo	conc. cima	conc. cima


f
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−25
−10
−5
5
10

Prob: Seja $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

(a) Determine o domínio de definição.

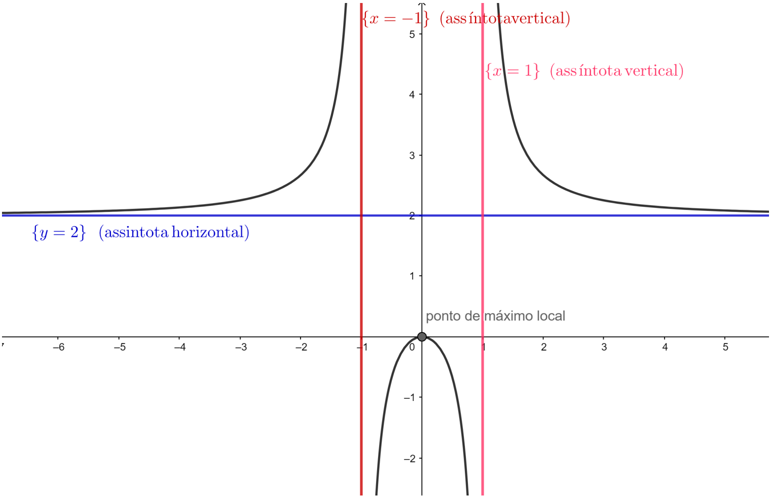
(b) Determine o domínio onde f cresce e decresce.

(c) Determine pontos de máximos e ou mínimos locais.

(d) Determine os intervalos de mudança de concavidade

(e) Determine as assintotas horizontais e verticais

(f) Esboce.


$\{x = -1\}$ (assíntotavertical)
$\{x = 1\}$ (assíntota vertical)
$\{y = 2\}$ (assintota horizontal)
ponto de máximo local