# MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

## Guia B 5 : Integral: Propriedades e Teorema Fundamental

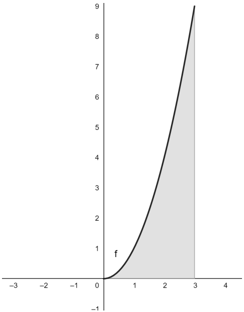
Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

**Alerta:** Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra http://www.geogebra.org

# Motivação

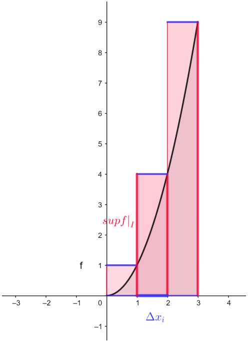
Como calcular a área de uma função continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f > 0$ ?



# Definição e propriedades

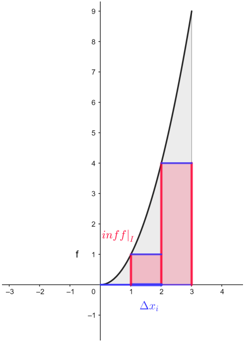
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função. Seja $P = a = x_0 < \cdots x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Defina

$$U(f, P) = \sum_i \sup(f)|_{[x_{i-1}, x_i]} \Delta x_i \qquad \text{onde} \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função. Seja $P = a = x_0 < \cdots x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Defina

$$L(f, P) = \sum_i \inf(f)|_{[x_{i-1}, x_i]} \Delta x_i \qquad \text{onde} \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$



Denotando $\mathcal{P}$ é o conjunto das partições de $[a, b]$ podemos definir:

$$\begin{aligned} U(f, a, b) &:= \inf_{P \in \mathcal{P}} U(f, P) \\ L(f, a, b) &:= \sup_{P \in \mathcal{P}} L(f, P) \end{aligned}$$

Por construção $L(f, a, b) \leq U(f, a, b)$

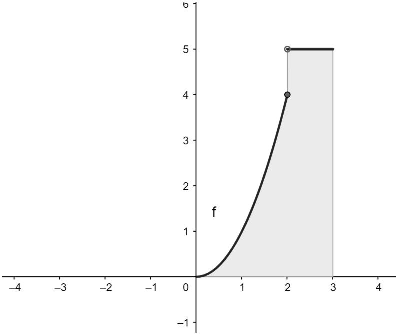
## Definição 1

Quando temos a igualdade $L(f, a, b) = U(f, a, b)$ dizemos que a função é **integrável** e denotamos tal <u>número</u>:

$$\int_a^b f(x)dx = L(f, a, b) = U(f, a, b)$$

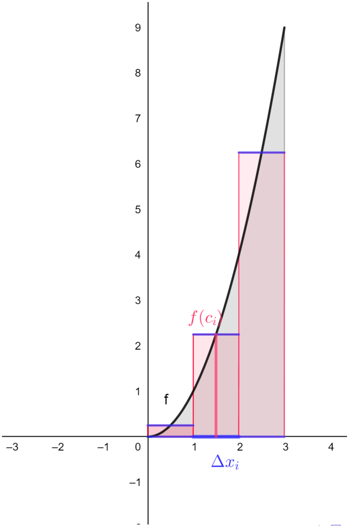
## Proposição 2

*Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ função limitada com* ***somente um número finito de descontinuidades*** *Então $f$ é integrável.*

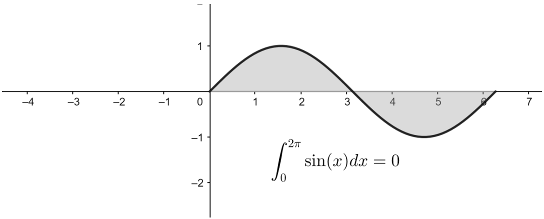


## Proposição 3

*Seja* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *função integrável então dado* $\epsilon>0$ *existe uma partição* $P$ *tal que* $\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_i f(c_i)\Delta x_i\right|<\epsilon$ *para qualquer* $c_i\in[x_{i-1},x_i]$



**Obs:** Se a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ não for sempre não negativa, a integral pode dar zero ou mesmo negativa.



**Obs:** $\int_a^a f(x)dx = 0$ e $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

## Proposição 4

*Sejam* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *e* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções integráveis e* $k \in \mathbb{R}$. *Então:*

(a) $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$

(b) $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ para $c \in [a, b]$.

(d) Se $f \leq g$ então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

(e) $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

# Teorema fundamental do Cálculo

## Teorema 5 (Parte I)

*Seja* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de classe* $C^1$ *e* $f(x) = F'(x)$ *então:*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}F(x)dx = F(b) - F(a) = F|_a^b}$$

**Ex:** Seja $f(x) = x^2$ e $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_1^2 x^2 dx = \int_1^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{(2)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} = \frac{7}{3}$$

**Dem:**

Pela Proposição 3, dado $\epsilon > 0$ existe uma partição $P$ tal que $|\int_a^b F'(x)dx - \sum_i F'(c_i)\Delta x_i| < \epsilon$ para qualquer $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Pelo teorema do valor médio (**TVM**) podemos escolher $c_i$ tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Assim TVM e **soma telescópica**

$$\sum_i F'(c_i)\Delta x_i = \sum_i \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x_{i-1}) = F(b) - F(a)$$

Logo

$$\Big| \int_a^b F'(x)dx - \big(F(b) - F(a)\big)\Big| < \epsilon$$

A arbitrariedade na escolha de $\epsilon$ termina a demonstração.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}F(x)dx = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

**Calcule**

1. $\int_a^b x^n dx$
2. $\int_a^b \cos(y)dy$
3. $\int_a^b \sin(t)dt$
4. $\int_a^b \exp(w)dw$
5. $\int_a^b \frac{1}{z}dz$ (onde $0 < a < b$ ou $a < b < 0$.)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}F(x)dx = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

**Sol:**

1. $\int_a^b x^n dx = \int_a^b \frac{d}{dx}(\frac{x^{n+1}}{n+1})dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}|_a^b$
2. $\int_a^b \cos(y)dy = \int_a^b \frac{d}{dy}\sin(y)dy = \sin(y)|_a^b$
3. $\int_a^b \sin(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(-\cos(t))dt = (-\cos(t))|_a^b$
4. $\int_a^b \exp(w)dw = \int_a^b \frac{d}{dw}\exp(w)dw = \exp(w)|_a^b$
5. $\int_a^b \frac{1}{z}dz = \int_a^b \frac{d}{dz}\ln(|z|)dz = \ln(|z|)|_a^b$ onde $0 < a < b$ ou $a < b < 0$.

Lembre que pela Proposição 4

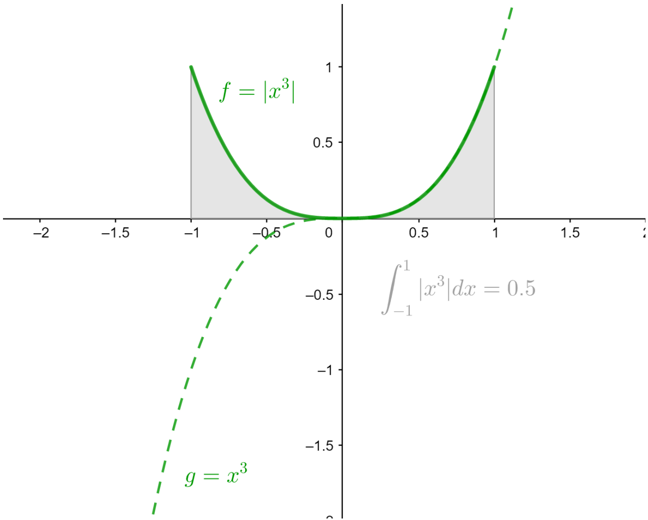
(a) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(b) $\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ para $c \in [a, b]$.

**Calcule:**

1. $\int_0^{\pi/2} 2\cos(x) + x^3 dx$
2. $\int_{-1}^{1} |x^3| dx$


$f = |x^3|$
$g = x^3$
$\int_{-1}^{1} |x^3| dx = 0.5$
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
−1.5
−1
−0.5
0.5
1

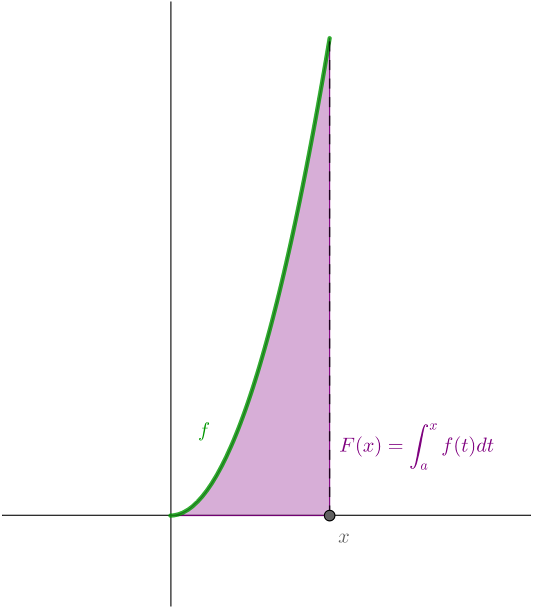
**Função descrita em termos de integral:** Dado uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua podemos definir a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ como $F(x) = \int_a^{(x)} f(t)dt$

**Ex:** Seja $f(x) = x^2$ considere:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^x t^2 dt \\ &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Neste exemplo temos:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 = f(x)$$


$f$
$F(x) = \int_a^x f(t)dt$
$x$

## Teorema 6 (Parte II)

*Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua e* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *definida como* $F(x) = \int_a^{(x)} f(t)dt$ *Então:*

$$\boxed{\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^{(x)} f(t)dt = f(x)}$$

**Ex:** $\frac{d}{dx}\int_0^x x^2 dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2$

## Teorema fundamental
## Parte I

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}F(x)dx = F(b) - F(a) = F|_a^b$$

## Parte II

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^{(x)} f(t)dt = f(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\int_a^{(x)} f(t)dt = f(x)}$$

**Prob:** Seja $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cosh^{17}(t)dt$ Calcule $\frac{d}{dx}F(x)$

**Prob:** Seja $G(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{(x^3)} \cosh^{17}(t)dt$ Calcule $\frac{d}{dx}G(x)$

Note os problemas não pedem para resolver, calcular a integral. Eles pedem para derivar $F$ e $G(x) = F(x^3)$

# Integral indefinida

**Definição:** Dizemos que uma função $F$ é **primitiva** de $f$ se $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$.

**Obs 1:** O teorema parte II anterior afirma que toda função continua admite primitiva.

**Obs 2:** O teorema parte I afirma que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b F'(x)dx = F|_a^b$.

**Obs: 3** Uma função $f$ contínua admite mais de uma primitiva. De fato se $F'(x) = f(x)$ então para $G(x) := F(x) + c$ temos $G'(x) = F'(x) = f(x)$ i.e., $G$ é primitiva de $f$.

**Obs: 4** Toda a primitiva de $f$ podem ser escritas como $F(x) + c$ onde $F$ é uma primitiva fixa. De fato se $G'(x) = f(x) = F'(x)$ então $(G - F)' = 0$ implica que $G - F = c$

**Obs: 5** A operação **integração indefinida** constitui em achar **todas** as primitivas de $f$.

**Obs: 6** A **notação** $\int f(x)dx$ indica a operação integração indefinida. Assim se $F' = f$ temos por Obs 3 e Obs 4 que $\int f(x)dx = F(x) + C$

**Ex:** $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

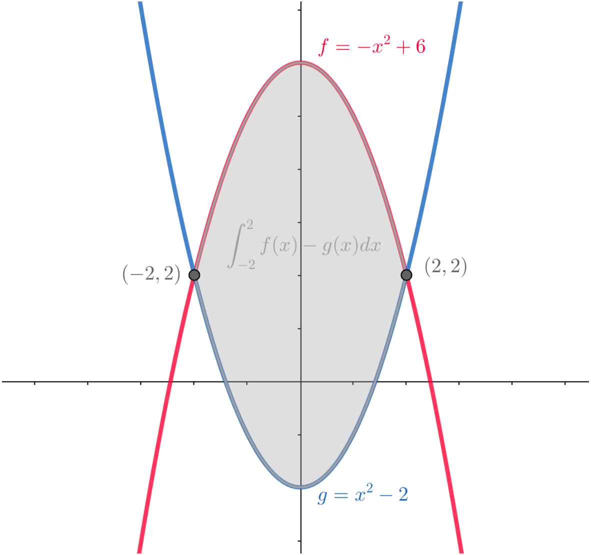
# Área entre gráficos

**Proposição 7**

*$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas tal que $g \leq f$. Então a área entre os gráficos $f$ e $g$ (e entre $y = a$ e $y = b$) é dada por: $\int_a^b f(x) - g(x)dx$*

**Ex:** Considere $f(x) = -x^2 + 6$ e $g(x) = x^2 - 2$. Determine a área entre os 2 gráficos. Primeiro determinamos $a$ e $b$.

Para tanto igualamos $x^2 - 2 = -x^2 + 6$ e encontramos $(-2, 2)$ e $(2, 2)$ como pontos de interseção dos gráficos. Assim $a = -2$ e $b = 2$.



$f = -x^2 + 6$
$\int_{-2}^{2} f(x) - g(x)dx$
$(-2, 2)$
$(2, 2)$
$g = x^2 - 2$

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{2} -x^2 + 6 - \left(x^2 - 2\right) dx \\
&= \int_{-2}^{2} -2x^2 + 8 dx \\
&= \frac{-2x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} + 8x\Big|_{-2}^{2} \\
&= \frac{64}{3}
\end{aligned}
$$

**Problema:** Esboce a região $A$ limitada pelas curvas $y = -x^2 + 4x$ e $y = x^2$ e encontre a area de $A$.

**Problema:** Esboce a região limitada pela parábola $y^2 = 2x + 6$ e pela reta $y = x - 1$, decida se é melhor integrar em relação a $x$ ou $y$ e calcule a área da região.