MAT0146: Cálculo Diferencial e Integral I para Economia

B 6 Integral: Excedente do consumidor e do produtor

Prof. M Alexandrino (IME-USP)

2024

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada. Figuras foram produzidas com o GeoGebra http://www.geogebra.org

(1) Excedente do consumidor

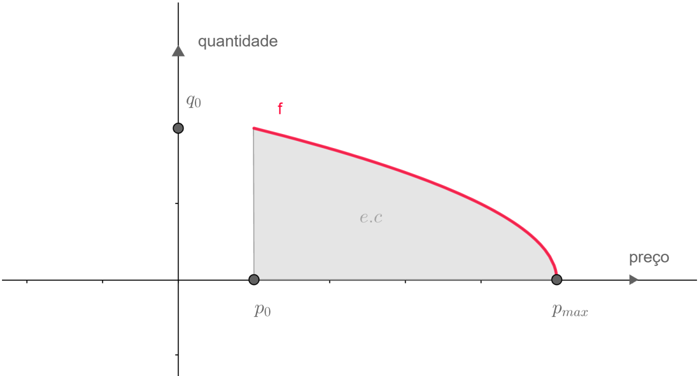
(2) Excedente do produtor

(3) Excedente do consumidor V.S excedente do produtor

Excedente do consumidor

Seja $q = f(p)$ a função demanda onde p é o preço e q a quantidade. A função demanda é positiva, em geral decrescente e em geral existe p_{max} (preço máximo) tal que $f(p_{max}) = 0$.
O **excedente do consumidor em termos do preço** (a partir do preço p_0) é definido como

$$ec := \int_{p_0}^{p_{max}} f(p)\, dp.$$



Excedente do consumidor: Interpretação

Seja $p_0 < \cdots < p_n = p_{max}$ uma partição por preços do intervalo $[p_0, p_{max}]$ e defina $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$.

$$ec(p_i) = f(p_i)(p_i + \Delta p_i) - f(p_i)p_i$$

. Em outras palavras $ec(p_i)$ mede a diferença entre

(a) o que o consumidor estaria disposto a gastar a mais e

(b) o que ele realmente gasta.

$$ec := \int_{p_0}^{p_{max}} f(p)\,dp \sim \sum_i ec(p_i)$$

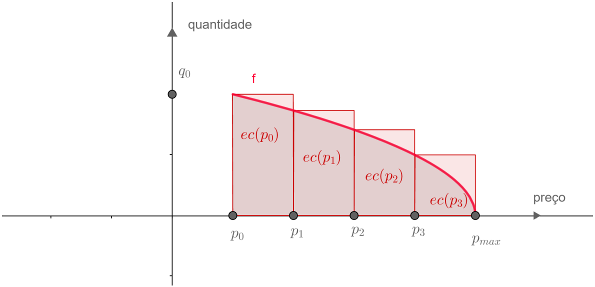
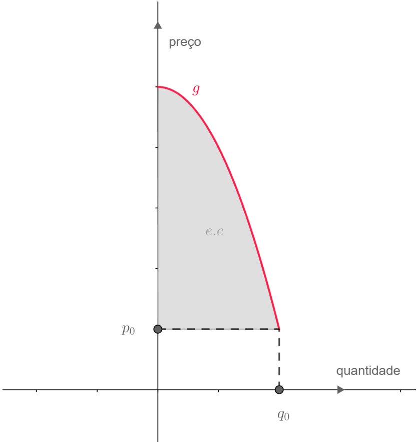


Figura: $ec := \int_{p_0}^{p_{max}} f(p)\,dp \sim \sum_i ec(p_i)$

Excedente do consumidor em termos da quantidade

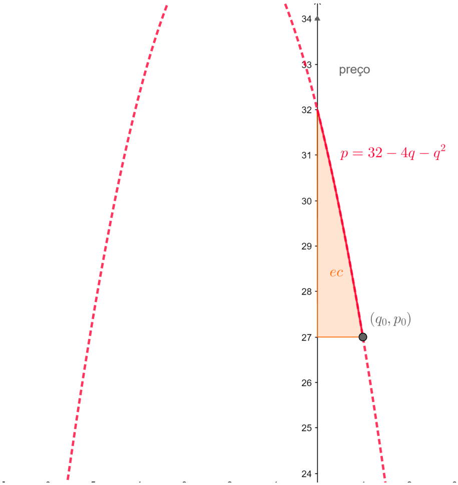
Considere agora a função demanda escrita em termos da quantidade ou seja $p = g(q)$ onde $g = f^{-1}$, p é o preço e q a quantidade. Então

$$ec = \int_0^{q_0} g(q)dq - q_0 p_0$$



$ec = \int_0^{q_0} g(q)dq - q_0 p_0$

Prob: Seja $p = 32 - 4q - q^2$ a função demanda (escrita em termos da quantidade). Ache o excedente do consumidor a partir de $p_0 = 27$.



34
33
32
31
30
29
28
27
26
25
24
preço
$p = 32 - 4q - q^2$
ec
(q_0, p_0)

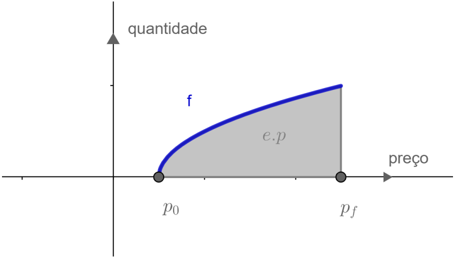
Ao resolver a equação $27 = 32 - 4q - q^2$ obtemos $q = 1$ (lembrando que não temos interesse na solução negativa). Assim:

$$\begin{aligned} ec &= \int_0^1 32 - 4q - q^2 dq - 27 \\ &= (32 - 2q^2 - \frac{q^3}{3})\Big|_0^1 - 27 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Excedente do produtor

Seja $q = f(p)$ a função oferta onde p é o preço e q a quantidade.
A função oferta é positiva, em geral crescente e em geral existe p_0 (preço mínimo) tal que $f(p_0) = 0$.
O **excedente do produtor** (até do preço final p_f) é definido como

$$ep := \int_{p_0}^{p_f} f(p)\, dp.$$



Excedente do Produtor: Interpretação

Seja $p_{min} = p_0 < \cdots < p_n = p_{final}$ uma partição por preços do intervalo $[p_{min}, p_{final}]$ e $\Delta p_i = p_{i+1} - p_i$.

$$ep(p_i) = f(p_{i+1})(p_i + \Delta p_i) - f(p_{i+1})p_i$$

.

Em outras palavras $ep(p_i)$ mede a diferença entre

(a) quanto a empresa receber com a venda do bem

(b) quanto a empresa estaria disposta a aceitar por determinada quantidade.

$$ep := \int_{p_{min}}^{p_{final}} f(p)\, dp \sim \sum_i ep(p_i)$$

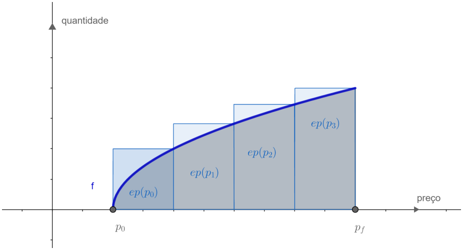
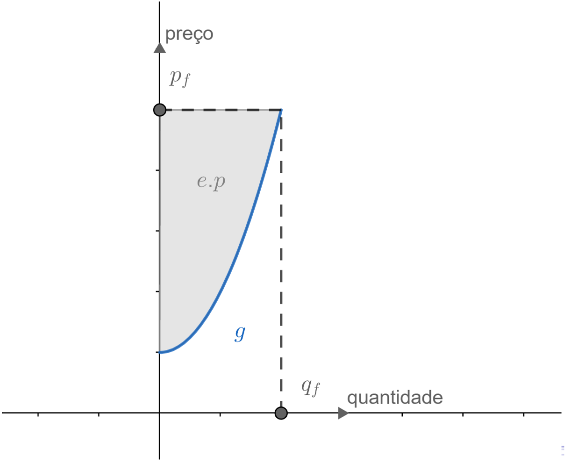


Figura: $ep := \int_{p_{min}}^{p_{final}} f(p)\, dp \sim \sum_i ep(p_i)$

Excedente do produtor em termos da quantidade

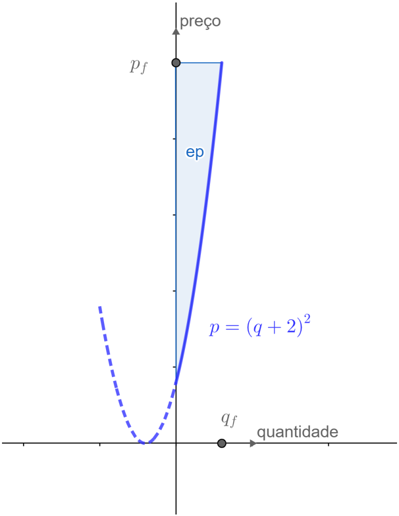
Considere agora a função oferta escrita em termos da quantidade ou seja $p = g(q)$ onde $g = f^{-1}$, p é o preço e q a quantidade. Então

$$ep = p_{final} q_{final} - \int_0^{q_{final}} g(q) dq$$



$ep = p_{final} q_{final} - \int_0^{q_{final}} g(q) dq$

Prob: Seja $p = (q+2)^2$ a função oferta escrita em termos da quantidade. Ache o excedente do produtor até o preço $p_{final} = 25$.



preço
p_f
ep
$p = (q+2)^2$
q_f
quantidade

$25 = (q_f + 2)^2$ assim $q_f = 3$. Temos então:

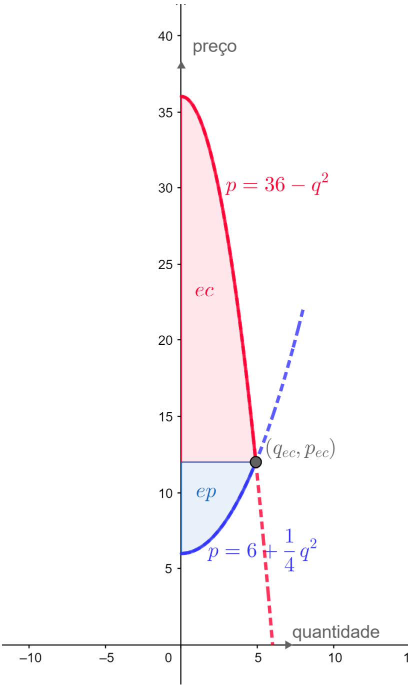
$$\begin{aligned} ep &= 3 \cdot 25 - \int_0^3 (q+2)^2 dq \\ &= 75 - \frac{(q+2)^3}{3}\Big|_0^3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

Excedente do consumidor V.S excedente do produtor

Prob A quantidade demandada $q_{eq.}$ e o preço correspondente $p_{eq.}$, sob condições de concorrência perfeita, são determinadas pela demanda $p = 36 - q^2$ e pela oferta $p = 6 + \frac{q^2}{4}$, i.e., o ponto $(q_{eq.}, p_{eq.})$ (equilibrio) esta na interseção da curva demanda com a curva oferta. Determine os correspondentes excedente do consumidor e produtor.

Sol:

$$\begin{aligned} ec &= \int_0^{q_{eq.}} g(q)dq - q_{eq.}p_{eq.} \\ ep &= p_{eq.}q_{eq.} - \int_0^{q_{eq.}} g(q)dq \end{aligned}$$



preço
quantidade
$p = 36 - q^2$
ec
ep
(q_{ec}, p_{ec})
$p = 6 + \frac{1}{4}q^2$
40
35
30
25
20
15
10
5
−10
−5
0
5
10

Primeiro determinamos o ponto de equilíbrio considerando a interseção dos 2 gráficos: $36 - q^2 = 6 + \frac{q^2}{4}$ Segue assim $q_{eq} = 2\sqrt{6}$ e $p_{eq} = 12$.

Assim:

$$
\begin{aligned}
ec &= \int_0^{2\sqrt{6}} 36 - q^2 dq - 24\sqrt{6} \\
&= (36q - \frac{q^3}{3})|_0^{2\sqrt{6}} - 24\sqrt{6} \\
&= 32\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
ep &= 24\sqrt{6} - \int_0^{2\sqrt{6}} 6 + \frac{q^2}{4} dq \\
&= 24\sqrt{6} - \left(6q + \frac{q^3}{12}\right)|_0^{2\sqrt{6}} \\
&= 8\sqrt{6}
\end{aligned}
$$