MAT122 - Álgebra Linear - 2019

Física Noturno - Profa. Martha Salerno Monteiro

Lista de Exercícios 1

Referente ao material do capítulo 2 do livro texto

Sistemas Lineares

1. Nos exercícios abaixo, desenhe gráficos (em $\mathbf{R}^2$) correspondentes aos sistemas lineares dados. Determine geometricamente se cada sistema tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. Então resolva cada sistema algebricamente para confirmar sua resposta.

   (a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 3x - 6y = 3 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$

2. Resolva cada sistema linear abaixo usando o método de substituição de trás para frente:

   (a) $\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 2y - z &= 1 \\ 3z &= -1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x - 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= -1 \end{cases}$

   Interprete os resultados obtidos.

3. Encontre um sistema de duas equações lineares nas variáveis x_1, x_2 e x_3, cujo conjunto solução seja dado pelas equações paramétricas $x_1 = t$, $x_2 = 1 + t$ e $x_3 = 2 - t$.

   Encontre uma outra solução paramétrica para o mesmo sistema anteriormente determinado, com parâmetro s e $x_3 = s$.

   Interprete geometricamente.

Método de Eliminação de Gauss

4. Use operações elementares com as linhas para reduzir a matriz dada à forma escalonada por linhas. Determine o posto da matriz.

   (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 2 \end{bmatrix}$

5. Resolva cada sistema dado usando o método de Eliminação de Gauss.

(a) $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & =9 \\ 2x_1 & -x_2 & +x_3 & =0 \\ 4x_1 & -x_2 & +x_3 & =4 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x & -y & +z & =0 \\ -x & +3y & +z & =5 \\ 3x & +y & +7z & =2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2r+s & = & 3 \\ 4r+s & = & 7 \\ 2r+5s & = & -1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} -x_1 & +3x_2 & -2x_3 & +4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & -6x_2 & +x_3 & -2x_4 & = & -3 \\ x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -8x_4 & = & 2 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} w & +x & +2y & +z & = & 1 \\ w & -x & -y & +z & = & 0 \\ & x & +y & & = & -1 \\ w & +x & & +z & = & 2 \end{cases}$

6. Determine, sem efetuar nenhum cálculo, se um sistema linear com a matriz completa dada abaixo tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. Justifique suas respostas.

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 6 \end{array}\right]$

7. A afirmação "se $ad-bc\neq 0$ então o sistema $\begin{cases} ax+by=r \\ cx+dy=s \end{cases}$ tem uma única solução" é verdadeira ou falsa? Justifique.

8. Determine para que valor(es) de k o sistema terá ou nenhuma solução, ou uma única solução, ou infinitas soluções:

(a) $\begin{cases} kx+2y & = & 3 \\ 2x-4y & = & -6 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+ky & = & 1 \\ kx+y & = & 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x-2y+3z & = & 2 \\ x+y+z & = & k \\ 2x-y+4z & = & k^2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x+y+kz & = & 1 \\ x+ky+z & = & 1 \\ kx+y+z & = & -2 \end{cases}$

9. Encontre a reta interseção dos planos de equações $3x+2y+z=-1$ e $2x-y+4z=5$

Conjuntos Geradores e Dependência Linear

10. Em cada caso, determine se o vetor $\mathbf{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u_1}$ e $\mathbf{u_2}$:

    (a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

    (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. Determine se o vetor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$, pertence ao conjunto gerado pelas colunas da matriz

    $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

12. Mostre que $\mathbf{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

13. Mostre que $\mathbf{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

14. Prove que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ pertencem a ger$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$.

15. Prove que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ pertencem a ger$[\mathbf{u}, \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}]$.

16. Suponha que $S = \{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}\}$ seja um conjunto de vetores de $\mathbf{R}^n$ e que $\mathbf{v}$ seja uma combinação linear de $\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}$. Se $S' = \{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_k}, \mathbf{v}\}$, mostre que ger$[S]$ = ger$[S']$.

17. Determine se os conjuntos de vetores dados são linearmente independentes (LI) ou linearmente dependentes (LD). Note que alguns dos exercícios podem ser respondidos sem que se faça nenhuma conta. Quando o conjunto for LD, encontre uma relação de dependência entre os vetores do conjunto.

(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Algumas respostas:

5. (a) $[2 \;\; 5 \;\; 1]^T$ (c) $[2 \;\; -1]^T$ (e) Não tem solução.

8. (b) Não tem solução se $k = -1$; uma única solução se $k \neq 1$ e $k \neq -1$; infinitas soluções se $k = 1$.

8. (d) Não tem solução se $k = 1$; uma única solução se $k \neq 1$ e $k \neq -2$; infinitas soluções se $k = -2$.

17. Os conjuntos em (a), (b), (e) são LI; os conjuntos em (c), (d), (f) são LD.