MAT122 - Álgebra Linear - 2019 - Física Noturno

Lista de Exercícios 10: Independência Linear, Geradores, Base, Mudança de base

1. Verifique se os conjuntos dados são LI ou LD. Se for LD, expresse um dos elementos como combinação linear dos demais.

   (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \right\} \subset M_{2\times 3}(\mathbb{R})$

   (b) $\{x, 2x - x^2, 4x + 2x^2\} \subset \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

   (c) $\{x^3, x^2 - 1, x + 2, x^3 + x^2 - x - 3\} \subset \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

2. Cristina precisa saber se o conjunto de funções $F = \{x, x \operatorname{sen} x, \cos x\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$ é LI ou LD. Com esse objetivo, ela considerou a relação $\alpha x + \beta x \operatorname{sen} x + \gamma \cos x \equiv 0$, para saber se necessariamente os coeficientes α, β, γ deveriam ser todos nulos. Atribuindo a x os valores $0, \frac{\pi}{2}$ e π, ela obteve o sistema $\begin{cases} \gamma = 0 \\ \frac{\pi}{2}\alpha + \frac{\pi}{2}\beta = 0 \\ \pi\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$

   (a) Resolva o sistema encontrado.

   (b) Cristina pode concluir que F é LI? Explique!

3. Verifique se o conjunto de funções $\{1, \operatorname{sen} x, \cos^2 x, \operatorname{sen}(2x), \cos(2x)\} \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$ é LI ou LD.

4. Se f e g são funções em $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R})$, o espaço vetorial de todas as funções com derivadas contínuas em $\mathbb{R}$, o determinante $W(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$ é chamado **Wronskiano** de f e g (em homenagem a Jósef Maria Hoëné-Wronski (1776 – 1853)). Prove que se $W(x)$ não é identicamente nulo, então $\{f, g\}$ é LI.[1]

5. Verifique se o conjunto de funções $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\} \subset \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R})$ é LI ou LD.

6. Verifique se o conjunto de funções $\{\operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen}(2x)\} \subset \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R})$ é LI ou LD.

7. Verifique se os conjuntos S_1 e S_2 dados geram o mesmo subespaço do espaço vetorial V:

   (a) $S_1 = \{[1 \ \ 0 \ \ 0]^T, [0 \ \ 1 \ \ 0]^T\}$, $S_2 = \{[1 \ \ 1 \ \ 0]^T, [1 \ \ -1 \ \ 0]^T\}$, $V = \mathbb{R}^3$

   (b) $S_1 = \{\operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t\}$, $S_2 = \{1, \operatorname{sen}(2t), \cos(2t)\}$, $V = \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ é contínua}\}$

   (c) $S_1 = \{1, t, t^2, t^3\}$, $S_2 = \{1, 1 + t, 1 - t^2, 1 - t - t^2\}$, $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$

8. Seja $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base do espaço vetorial V e seja v um vetor qualquer de V. O conjunto $A = \{v, v - e_1, v - e_2, v - e_3\}$ pode ser linearmente independente? Justifique.

9. Determine uma base e a dimensão de cada um dos subespaços abaixo:

   (a) $S = \{[x \ \ y \ \ z \ \ w]^T \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = w, x - 3y + w = 0\}$

[1] O resultado pode ser generalizado para n funções $f_1, f_2, \ldots, f_n$ em $\mathcal{C}^{(n-1)}(\mathbb{R})$. Nesse caso, o Wronskiano é dado por

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(b) $S = \{p \in \mathcal{P}_4(\mathbb{R}) \mid p(1) = p(-1) = 0\}$

(c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$

(d) $S = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ comuta com a matriz } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

(e) $S = \{[x \quad y \quad z \quad w \quad t]^T \in \mathbb{R}^5 \mid x + y - az + 3w + t = 0, 2x - y + z + 2aw + 5t = 0\}$, sendo a um número real fixado.

10. Seja $B = \{1, 2 - x, x^2 + 1, 1 + x + x^3\}$. Verifique que B é uma base para o espaço $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e determine as coordenadas do polinômio $p(x) = x^3$ em relação à base B.

11. Seja $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Verifique que B é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Determine os valores de m, n, r, w para que as matrizes $P = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 2 & s \end{bmatrix}$ e $Q = [m \quad n \quad n \quad m]^T{}_B$ sejam iguais.

12. Considere o subespaço S de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ dado por $S = \text{ ger}\{x^3 - x^2 + 1, x^3 + x^2 - x, x^3 + bx^2 + x + 2\}$. Determine b para que S tenha dimensão 2.

13. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$A = \{[0 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1]^T, [0 \quad 0 \quad 3 \quad -1 \quad 2]^T, [0 \quad 4 \quad -5 \quad 1 \quad 0]^T\}$$

e seja $\mathbf{v} = [0 \quad m \quad -m \quad 1 \quad 1]^T$.

(a) Determine uma base para S.

(b) Determine todos os valores de m para os quais $\mathbf{v} \in S$.

(c) Se $\mathbf{v} \notin S$, é verdade que $\text{ger}\{A \cup \mathbf{v}\} = \{[x \quad y \quad z \quad s \quad t]^T \in \mathbb{R}^5 \mid x = 0\}$?

14. Determine os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais o polinômio $p(t) = 4t^2 + 2t + 4$ pertença ao subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ gerado pelos polinômios $p_1(t) = b(t+1), p_2(t) = 1 - bt^2$ e $p_3(t) = 1 + bt + bt^2$.

15. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$A = \{[1 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \quad 0]^T, [2 \quad 1 \quad 3 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad 1 \quad -5 \quad 4 \quad 0]^T, [1 \quad 0 \quad -11 \quad 10 \quad 0]^T\}$$

(a) Determine uma base B para S que esteja contida em A.

(b) Complete a base B para uma base de $\mathbb{R}^5$.

16. Sejam $\mathcal{B}$ a base canônica e $\mathcal{C}$ a base $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^2$ e seja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ e $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$.

(b) Determine a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$.

(c) Use sua resposta ao item (b) para calcular $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ e compare com a resposta encontrada no item (a).

17. Sejam $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e seja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$.

    (a) Encontre $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ e $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$.

    (b) Determine a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$.

    (c) Use sua resposta ao item (b) para calcular $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ e compare com a resposta encontrada no item (a).

18. Sejam $\mathcal{B}$ a base canônica e $\mathcal{C}$ a base $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ e seja $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

    (a) Encontre $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ e $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$.

    (b) Determine a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$.

    (c) Use sua resposta ao item (b) para calcular $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ e compare com a resposta encontrada no item (a).

19. Sejam $\mathcal{B} = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$ e $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$ bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e seja $p(x) = 1 + x^2$.

    (a) Encontre $[p]_{\mathcal{B}}$ e $[p]_{\mathcal{C}}$.

    (b) Determine a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$.

    (c) Use sua resposta ao item (b) para calcular $[p]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[p]_{\mathcal{B}}$ e compare com a resposta encontrada no item (a).

20. Sejam $\mathcal{B}$ a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ uma outra base, e seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

    (a) Encontre $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ e $[\mathbf{A}]_{\mathcal{C}}$.

    (b) Determine a matriz de mudança de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$.

    (c) Use sua resposta ao item (b) para calcular $[\mathbf{A}]_{\mathcal{C}}$ a partir de $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}}$ e compare com a resposta encontrada no item (a).

21. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Se $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ e a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ é $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, determine $\mathcal{B}$.

22. Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Encontre $\mathcal{C}$ sabendo que $\mathcal{B} = \{x, 1+x, 1-x+x^2\}$ e que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para $\mathcal{C}$ é $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Algumas respostas:

1. (a) LI; (b) LD, $4x + 2x^2 = -2(2x - x^2) + 8(x)$; (c) LD, $x^3 + x^2 - x - 3 = 1(x^3) + 1(x^2 + 1) + (-1)(x + 2)$

2. (a) $\alpha = \beta = \gamma = 0$; (b) sim!

3. LD, $\cos^2 x = \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 \cdot \operatorname{sen} x + 0 \cdot \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$

4. Se $\alpha f(x) + \beta g(x) = 0$ para todo x (função constante), então $\alpha f'(x) + \beta g'(x) = 0$ para todo x. Logo, para cada x real fixado, tem-se um sistema homogêneo nas incógnitas α e β: $\begin{cases} \alpha f(x) + \beta g(x) & = 0 \\ \alpha f'(x) + \beta g'(x) & = 0 \end{cases}$

Se houver algum x_0 tal que o sistema só admita a solução nula, então essa será a única solução de todos os sistemas (pois nenhuma outra solução servirá para $x = x_0$) e as funções f e g serão LI. Portanto, se $W(x_0) \neq 0$ para algum x_0, o sistema terá apenas uma solução, a nula, e $\{f, g\}$ será LI.

5. LI pois $W(0) \neq 0$.

7. (a) sim; (b) sim; (c) não, pois $t^3 \notin \operatorname{ger}(S_2)$

8. Não.

9. (a) $\dim S = 2$; (b) $\dim S = 3$; (c) $\dim S = 2$, (d) $\dim S = 2$;
(e) $\dim S = 3$, base: $\{[-2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^T, [\, \frac{a-1}{2} \;\; \frac{1+2a}{3} \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]^T, [\, \frac{-2a-3}{3} \;\; \frac{2a-6}{3} \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]^T\}$

10. $[p]_{\mathcal{B}} = [-3 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0]^T$

11. (b) $m = \frac{3}{2}, n = \frac{1}{2}, r = 4, s = -2$

12. $b = -3$

13. (a) $\{[0 \;\; 2 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 1]^T, [0 \;\; 0 \;\; 3 \;\; -1 \;\; 2]^T\}$; (b) $m = 6$; (c) não

14. $b \neq 0$ e $b \neq 2$

15. (a) $\{[1 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 2 \;\; 0]^T, [2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 0]^T, [0 \;\; 1 \;\; -5 \;\; 4 \;\; 0]^T\}$;
(b) $\{[1 \;\; 0 \;\; -1 \;\; 2 \;\; 0]^T, [2 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 0]^T, [0 \;\; 1 \;\; -5 \;\; 4 \;\; 0]^T, [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0]^T, [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]^T\}$;

16. (a) $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; (b) $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

18. (a) $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$; (b) $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

19. (a) $[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{p}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; (b) $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

20. (a) $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$; $[\mathbf{A}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ -3 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$; (b) $P_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

21. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$

22. $\mathcal{C} = \{p_1, p_2, p_3\}$, sendo $p_1(x) = 1 \cdot x - 1(1_x) + 2(1 - x + x^2)$, $p_2(x) = 1(1 - x) - 1(1 - x + x^2)$, e $p_3(x) = -1(1 - x) + 2(1 - x + x^2)$.