MAT122 - Álgebra Linear - 2019 - Física Noturno

Lista de Exercícios 11: Transformações Lineares entre Espaços Vetoriais

1. Verifique que as seguintes transformações são lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta \\ x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta \\ z \end{bmatrix}$ ($\theta \in \mathbb{R}$ fixado).
   Interprete geometricamente o efeito desta transformação.

   (b) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), T\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4y & 3z \\ 5x - 3w & 7y - 2z \end{bmatrix}$.

   (c) $T : \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}), T(f) = f''$.

   (d) $T : P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, T(p) = p(1)$.

   (e) $T : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}^{(1)}([a,b]), (Tf)(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a,b]$.

2. Verifique que as seguintes transformações *não são* lineares:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y - 1 \\ 2x + 5y + 3 \end{bmatrix}$

   (b) $T : P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R}), T(p)(x) = x + p(x)$

   (c) $T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R}), T(f) = (f)^2$

3. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

   (a) Quais das seguintes matrizes pertencem a $\ker(T)$?
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

   (b) Quais das matrizes do item (a) pertencem a $\mathrm{Im}\,(T)$?

   (c) Determine $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}\,(T)$.

4. Determine uma base para o núcleo e uma base para a imagem de cada transformação linear:

   (a) $T : P_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, T(p) = p(3)$.

   (b) $T : P_3(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R}), T(p)(x) = xp(x)$.

   (c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + d & 0 \\ 3b & a + b + c \end{bmatrix}$.

   (d) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (a + b + c, 3a - b + 2c, 2b + 3c)$.

5. Seja $D^2 : \mathcal{C}^{(2)}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida por $D^2(f) = f''$. Determine o núcleo de D^2.

6. Determine $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ sabendo que $T(1,0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $T(0,1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Prove as afirmações abaixo supondo $T : V \to W$ uma transformação linear:

   (a) Se $\dim V = 6$, $\dim W = 4$ e $\dim(\ker T) = 2$ então T é sobrejetora.

   (b) Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ é uma base de V e se $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0} = T(\mathbf{e}_4)$, então $\dim(\operatorname{Im} T) \leq 2$.

8. Em cada item a seguir, determine a matriz A da transformação linear $T : V \to W$ em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ respectivamente. Além disso, para o vetor $\mathbf{v}$ dado, calcule $T(\mathbf{v}$ diretamente e também usando que $A[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$.

   (a) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, T(P(x)) = p(x+2), \mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \mathcal{C} = \{1, x+2, (x+2)^2\}; \mathbf{v} = a + bx + cx^2$

   (b) $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2, T(P(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \{x^2, x, 1\}, \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}; \mathbf{v} = a + bx + cx^2$

   (c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), T(A) = A^T, \mathcal{B} = \mathcal{C} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

9. Considere o subespaço $W = \text{ ger}\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ de $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

   (a) Prove que a transformação linear $D(f) = f'$ leva W em W.

   (b) Determine a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{\operatorname{sen} x, \cos x\}$.

   (c) Calcule $D(f)$ para $f(x) = 3 \operatorname{sen} x - 5 \cos x$ de duas maneiras: diretamente, e usando $[D]_{\mathcal{B}}([f]_{\mathcal{B}}) = [D(f)]_{\mathcal{B}}$.

10. Considere o subespaço $W = \text{ ger}\{e^{2x}, e^{2x} \cos x, e^{2x} \operatorname{sen} x\}$ de $V = \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

   (a) Determine a matriz de D em relação à base $\mathcal{B} = \{e^{2x}, e^{2x} \cos x, e^{2x} \operatorname{sen} x\}$

   (b) Calcule $D(f)$ para $f(x) = 3e^{2x} - e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \operatorname{sen} x$ de duas maneiras: diretamente, e usando $[D]_{\mathcal{B}}([f]_{\mathcal{B}}) = [D(f)]_{\mathcal{B}}$.

Algumas respostas:

3. (a) Apenas a matriz B. (b) Apenas a matriz C.

(c) $\ker(T) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}, \forall b, c \in \mathbb{R};\ \operatorname{Im}(T) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}, \forall a, d \in \mathbb{R}.$

(d) Uma base para $\ker(T)$ é $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$; Uma base para $\operatorname{Im}(T)$ é $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

8. (a) $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; T(\mathbf{v}) = a + b(x+2) + c(x+2)^2;\ [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}([\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ (c) $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}([\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{bmatrix} = [T(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}}$