MAT122 - Álgebra Linear - 2019

Física Noturno - Profa. Martha Salerno Monteiro

Lista de Exercícios 2: Matrizes

1. Determine a, b, c e d sabendo que $\begin{bmatrix} a-b & b-c \\ c-d & d-a \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

2. Calcule: (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $3\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T - 2\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

3. Determine A, sabendo que $5A - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 3A - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

   Explicite quais propriedades de matrizes foram usadas em cada passagem.

4. Escreva o sistema de equações lineares $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$ como uma equação matricial da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

   Observando apenas a matriz A é possível decidir quantas soluções tem o sistema? Explique!

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule $A^2, A^3, \ldots, A^7$.

   (b) Determine A^{2019}. Justifique sua resposta.

6. Seja $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

   (a) Mostre que $R^2 = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}$

   (b) Usando indução matemática, mostre que $R^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\operatorname{sen}(n\theta) \\ \operatorname{sen}(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$

7. Sejam $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Escreva $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ como combinação linear de A_1 e A_2.

   (b) Ache uma expressão geral que descreva o conjunto gerado pelas matrizes A_1 e A_2.

8. Sejam $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (a) Escreva $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ como combinação linear de A_1, A_2 e A_3.

   (b) Ache uma expressão geral que descreva o conjunto gerado pelas matrizes A_1, A_2 e A_3.

9. Seja A uma matriz 2×2 qualquer.

   (a) Mostre que existem números reais $a, b, c,$ e d tais que

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) Mostre que existem números reais $p, q, r,$ e s tais que

$$A = p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + q \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (c) Interprete os resultados em (a) e (b).

10. Determine se as matrizes dadas são linearmente dependentes ou linearmente independentes. Se forem dependentes, escreva uma relação de dependência entre elas.

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

11. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Determine condições sobre x, y, z e w para que $AX = XA$.

12. Sabemos que uma matriz quadrada A é *simétrica* se $A^T = A$.

    (a) Dê exemplos de uma matriz simétrica 2×2 e uma simétrica 3×3.

    (b) Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica e que se k é um número real e A é matriz simétrica então kA é uma matriz simétrica.

13. Uma matriz quadrada A é *antissimétrica* se $A^T = -A$.

    (a) Quais das matrizes abaixo são antissimétricas?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Você reparou em alguma propriedade especial das matrizes antissimétricas?

14. Prove que em uma matriz antissimétrica, todos os termos na diagonal principal são nulos.

15. Prove que se A é uma matriz quadrada então a matriz $B = A - A^T$ é antissimétrica.

16. Prove que toda matriz quadrada pode ser escrita como uma soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

17. Escreva a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ como soma de uma matriz simétrica com uma antissimétrica.

18. Determine a inversa das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

19. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine A^{-1} e use-a para resolver os sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b_1}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b_2}$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{b_3}$.

(b) Resolva os três sistemas simultaneamente reduzindo por linhas a matriz completa $[A \mid \mathbf{b_1}\ \mathbf{b_2}\ \mathbf{b_3}]$.

20. Mostre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Dê um contra-exemplo que mostre que, em geral, a igualdade $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ é falsa. Sob que condições a igualdade é verdadeira? Justifique.

21. Use o Método de Gauss-Jordan para encontrar a inversa da matriz dada (se existir):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$$

Algumas respostas:

1. Infinitas soluções da forma $(a,b,c,d) = (-2,-4,-6,0) + t(1,1,1,1)$, com t arbitrário.

2b. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$

5a. $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. (a) $B = 2A_1 + A_2$; (b) $\text{ger}(A_1, A_2) = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 & 2c_1 + c_2 \\ -c_1 + 2c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} w & x \\ 2x - 5w & x - w \end{bmatrix} \right\}$

8. (a) Impossível.

(b) $\text{ger}(A_1, A_2, A_3) = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 & 2c_2 + c_3 & -c_1 + c_3 \\ 0 & c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -3b + 4c + 5e & b & c \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} \right\}$

10. (a) LD; $A + B - 3C = 0$ (b) LD **11.** $x = w, z = 0$. **13.** B e C

17. $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$

$D^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix}$ (interprete!)

21. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 2\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{d} & -\frac{b}{d} & -\frac{c}{d} & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$, para $d \neq 0$