MAT122 - Álgebra Linear - 2019

Física Noturno - Profa. Martha Salerno Monteiro

Lista de Exercícios 3: Matrizes Elementares

Lembremos que uma matriz quadrada E que é obtida fazendo-se *uma única* operação elementar com as linhas de uma matriz identidade é chamada **Matriz Elementar**. Por exemplo, as matrizes

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são matrizes elementares.

1. Prove que toda matriz elementar E é inversível e que sua inversa E^{-1} é obtida fazendo-se a operação com as linhas que reverte a operação feita de I para E.

2. Sejam E_1, E_2 e E_3 as matrizes elementares do exemplo acima.

   (a) Determine as matrizes inversas de E_1, E_2 e E_3.

   (b) Seja $X = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ r & s & t & t \\ x & y & z & w \end{bmatrix}$. Para cada $i = 1, 2, 3$, determine $Y_i = E_i X$ e descreva sua relação com X.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

   (i) Determine as matrizes elementares E_i que satisfazem as equações dadas:

   (a) $E_1 A = B$ (b) $E_2 B = A$ (c) $E_3 A = C$

   (d) $E_4 C = A$ (e) $E_5 C = D$ (f) $E_6 D = C$

   (ii) Existe uma relação entre as matrizes E_1 e E_2? E entre E_3 e E_4? E entre E_5 e E_6?

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   Verifique que A é inversível e escreva A como produto de matrizes elementares. Sugestão: Use o método de Gauss-Jordam para levar a matriz $[A \quad I]$ na matriz $[I \quad A^{-1}]$ e observe quais operações com as linhas foram realizadas.

5. Encontre uma sequência de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que $E_k \cdots E_2 E_1 A = I$. Use essa sequência para escrever A e A^{-1} como produto de matrizes elementares:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. Prove que se A é uma matriz inversível e $BA = CA$ então $B = C$. Dê um contra-exemplo para mostrar que o resultado pode ser falso se A não for inversível.

7. A afirmação "Se A e B são matrizes tais que $AB = 0$ então $A = 0$ ou $B = 0$" é verdadeira ou falsa? Justifique.

8. Prove que se A é uma matriz inversível e $AB = 0$ então $B = 0$.