MAT122 - Álgebra Linear - 2019

Física Noturno - Profa. Martha Salerno Monteiro

Lista de Exercícios 4: Subespaços, Base, Dimensão e Posto

1. Determine se cada um dos subconjuntos dados é um subespaço de $\mathbf{R}^2$. Justifique sua resposta.

   (a) $S_1 = \{(x, y) \,/ y = 0\}$

   (b) $S_2 = \{(x, y) \,/ y = 2\}$

   (c) $S_3 = \{(x, y) \,/ y = 3x\}$

   (d) $S_4 = \{(x, y) \,/ x \leq 0\}$

   (e) $S_5 = \{(x, y) \,/ xy \geq 0\}$

   (f) $S_6 = \{(x, y) \,/ xy = 0\}$

2. Determine se cada um dos subconjuntos dados é um subespaço de $\mathbf{R}^3$. Justifique sua resposta.

   (a) $S_1 = \{(x, y, z) \,/ y = 0, x = 3z\}$

   (b) $S_2 = \{(x, y, z) \,/ x + y - z = 2\}$

   (c) $S_3 = \{(x, y, z) \,/ x = y = z\}$

   (d) $S_4 = \{(x, y, z) \,/ |x - y| = |y - z|\}$

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Verifique se cada vetor dado pertence ao subespaço col(A), gerado pelas colunas de A:

   $$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   (b) Verifique se cada vetor dado pertence ao subespaço lin(A), gerado pelas linhas de A:

   $$\mathbf{u} = [-1 \;\; 1 \;\; 1] \qquad \mathbf{v} = [1 \;\; 1 \;\; 1] \qquad \mathbf{w} = [1 \;\; 3 \;\; 5]$$

   (c) Verifique se cada vetor dado pertence ao *subespaço anulado por* A:

   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

4. (a) Determine uma base para cada um dos subespaços col(A), lin(A) e anul(A), sendo A a matriz do exercício 3.

   (b) Determine uma base para cada um dos subespaços col(B), lin(B) e anul(B), sendo B a transposta da matriz A do exercício 3.

   (c) Compare suas respostas com as respostas em (a) e (b) e explique o que reparou.

5. Determine uma base para cada um dos subespaços col(M), lin(M) e anul(M), sendo $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

6. Verifique se a afirmação dada é verdadeira ou falsa. Se for verdadeira, prove. Se for falsa, mostre um contraexemplo.

   (a) Se B é a matriz obtida a partir da matriz A por meio de uma operação elementar com as linhas então os subespaços Lin(A) e Lin(B) são iguais.

   (b) Se A é uma matriz $m \times n$ e as linhas de A são LI então Lin$(A) = \mathbf{R}^n$.

   (c) Se A e B são matrizes $m \times n$ de mesmo posto r então o posto da matriz $A + B$ também é r.

   (d) Se A e B são matrizes $n \times n$ de posto n então o posto da matriz AB também é n.

7. Determine uma base para o subespaço anulado pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. Seja A uma matriz 3×4. Os vetores-linha de A podem ser LI? E os vetores-coluna?

9. O subespaço anulado por uma matriz 3×6 pode ter dimensão 2?

10. Considere o sistema de equações $Ax = b$, sendo A uma matriz $m \times n$ e b uma matriz $m \times 1$. Mostre que o sistema tem solução se e somente se $b \in \text{col}(A)$.

11. Determine o posto da matriz dada em função dos possíveis valores de a:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -2 & 4a & 2 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad$ (b) $B = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & a \end{bmatrix}$

12. Use o Teorema Fundamental das matrizes inversíveis para responder às seguintes questões:

    (a) Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbf{R}^3$?

    (b) Os vetores $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de R^4?

    (c) Os vetores $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ formam uma base de R^4?

13. Verifique que $\mathcal{B}$ é um conjunto LI, que o vetor $\mathbf{w}$ pertence a ger($\mathcal{B}$) e determine o vetor das coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $\mathcal{B}$, sendo $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

Algumas respostas:

1. São subespaços: S_1 e S_3.

2. São subespaços: S_1, S_2 e S_3. Note que, por exemplo, os vetores $(3, 1, -1)$ e $(2, 5, 2)$ pertencem a S_4, mas sua soma não pertence.

6. (a) V; (b) F. Por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem linhas LI e Lin(A) não é $\mathbf{R}^3$; (c) F. Por exemplo, tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ambas têm posto 2 e $A + B$ tem posto 0; (d) V.

7. $\text{anul}(A) = \text{ger}\ \{X_1, X_2\}$, sendo $X_1 = [2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$ e $X_2 = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 1]^T$

8. Os vetores-linha podem ser LI. Nesse caso, tem-se que o posto de A é igual à dimensão do subespaço Lin(A), que é 3. Como as dimensões dos subespaços Lin(A) e Col(A) são sempre iguais, as colunas, que são 4, não podem ser LI.

11. (a) Se $a = -1$ então o posto de A é 1; Se $a = 2$, o posto de A é 2; se $a \neq -1, 2$, o posto de A é 3.

13. $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.