MAT122 - Álgebra Linear - 2019 - Física Noturno

Lista de Exercícios 5: Transformações Lineares - Introdução

1. Em cada caso, prove que a transformação dada é uma transformação linear:

   (a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3x-2y \end{bmatrix}$ (b) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ 0 \\ 5y-2x \end{bmatrix}$ (c) $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ x-2y \\ y-4z \end{bmatrix}$

2. Em cada caso, mostre que T não é uma transformação linear. Justifique sua resposta.

   (a) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$ (c) $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |y| \\ x+y \end{bmatrix}$

3. Em cada caso, suponha que $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ seja uma transformação linear e use essa informação para determinar $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ em $\mathbf{R}^2$. Além disso, encontre a matriz de T.

   (a) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ (b) $T\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

   (c) $T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $T\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Determine a matriz de cada uma das transformações abaixo e esboce a imagem do quadrado unitário:

   (a) Reflexão em relação à reta $y = -x$.

   (b) Projeção sobre a reta $y = -x$.

   (c) Rotação de $\dfrac{\pi}{4}$ em torno da origem, no sentido anti-horário.

   (d) Reflexão em relação à reta $y = 2x$.

5. Ache a matriz canônica da transformação de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}^2$ obtida pela composição de duas transformações:

   (a) Reflexão em relação ao eixo x seguida pela rotação de $\frac{\pi}{2}$ em torno da origem no sentido anti-horário.

   (b) Rotação de $\frac{\pi}{3}$ em torno da origem, seguida pela reflexão em relação à reta $y = x$.

6. Mostre que se P é uma projeção sobre uma reta qualquer então $P \circ P = P$ de duas maneiras: geometricamente e algebricamente.

7. Mostre que se R é uma reflexão em relação a uma reta qualquer então $R^{-1} = R$ de duas maneiras: geometricamente e algebricamente.

8. Sejam $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ e r a reta de equação $2y - x = 0$.

   (a) Determine a projeção de $\mathbf{v}$ sobre r.

   (b) Determine a reflexão de $\mathbf{v}$ em relação a r.

   (c) Determine também a rotação de $\theta = \frac{\pi}{3}$ do vetor $\mathbf{v}$ em torno da origem.

9. Problema: como fazer uma rotação em torno de um ponto que não é a origem?

   Fixado um vetor não nulo $\mathbf{w}$, seja $T_{\mathbf{w}} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ a translação (que não é uma transformação linear) dada por $T_{\mathbf{w}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$

Represente cada vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ como um vetor-coluna 3×1 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ (também chamadas *coordenadas homogêneas de* $\mathbf{v}$).

(a) Seja $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ Calcule o produto $\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$. O que você pode concluir?

Denote a matriz 3×3 acima por T_w^H.

(b) Seja T_A a transformação linear induzida pela matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Calcule o produto $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$.

O que você pode concluir?

Denote a matriz 3×3 acima por A^H.

(c) Como você pode calcular a rotação por um ângulo θ de um vetor $\mathbf{v}$ em torno de um ponto P que não é a origem usando transformações lineares?

Algumas respostas:

3. (a) $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (b) $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(c) $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{10}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

4. (b) $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

5. (a) Se T é a reflexão em relação ao eixo dos x, sua matriz é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Se S é a rotação de $\frac{\pi}{2}$, sua matriz é $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, a composta $S \circ T$ (nesta ordem) tem matriz $BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, que é a reflexão em relação à reta $y = x$.

(b) A matriz da rotação R é $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. A matriz da reflexão S em relação à reta $y = x$ é $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, a transformação resultante é dada pela matriz $BA = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

8. (a) Projeção: $\mathbf{w} = P_{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. (b) Reflexão: $\mathbf{u} = Q_{\frac{1}{2}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. (c) Rotação de $\frac{\pi}{3}$: $\mathbf{r} = R_{\frac{\pi}{3}}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \end{bmatrix}$.

9. (a) O produto resulta nas coordenadas homogêneas de $T_{\mathbf{w}}(\mathbf{v})$. (b) O produto resulta nas coordenadas homogêneas de $A\mathbf{v}$. (c) Basta calcular a composta $T_w^H \circ R_\theta^H \circ T_{-w}^H \left([x \;\; y \;\; 1]^T\right)$ (primeiro leva P para a origem, faz a rotação e finalmente volta para P).