MAT122 - Álgebra Linear - 2019 - Física Noturno

Lista de Exercícios 6: Autovalores, autovetores e determinantes

1. Mostre que $\lambda = 3$ é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e encontre o autoespaço associado E_3.

2. Mostre que $\lambda = 2$ é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e encontre o autoespaço associado E_2.

3. Determine os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Determine os autovalores e os respectivos autoespaços associados das matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule também o determinante e o traço de cada matriz.

5. Determine os autovalores e autovetores de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

6. Determine os autovalores de $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
   (a) Determine os autovalores de A e de B.
   (b) Você observou alguma relação entre eles? Será que essa relação vale sempre?
   (c) Prove que se λ é um autovalor de A então $\lambda + k$ é autovalor de $A + kI$.

8. Verifique que a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$. Além disso:
   (a) Determine os autovalores de A e de A^{-1}.
   (b) Você observou alguma relação entre eles? Será que essa relação vale sempre?
   (c) Prove que se $\lambda \neq 0$ é um autovalor de A então λ^{-1} é autovalor de A^{-1}.

9. Calcule o quadrado da matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Além disso:
   (a) Determine os autovalores de A e de A^2.
   (b) Você observou alguma relação entre eles?
   (c) Prove que se λ é um autovalor de A então λ^2 é autovalor de A^2.

10. Se λ é um autovalor de A, mostre que:

(a) $k\lambda$ é autovalor de kA para cada número k.

(b) $3 - 2\lambda + 5\lambda^3$ é um autovalor de $3I - 2A + 5A^3$.

11. Calcule o determinante de cada matriz dada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & x \\ 0 & c & y & z \\ d & r & s & t \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Se a afirmação for verdadeira, prove; se for falsa, dê um contra-exemplo:

(a) $\det(-A) = -\det(A)$ (b) Se A é uma matriz 2×2 então $\det(5A) = 25\det(A)$.

(c) $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ (d) Se A tem duas linhas idênticas, então $\det(A) = 0$.

13. Se A é uma matriz $n \times n$, o que você pode dizer sobre o determinante de A sabendo que:

(a) $A^2 = I$ (b) $A^3 = I$ (c) $A = -A^T$ (d) $A^3 = A$ (e) $A^{-1} = A^T$

14. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ e calcule seu determinante. Em cada caso, tende descobrir o valor de $\det(N)$ sem fazer o cálculo do determinante diretamente e depois compare com o cálculo direto:

(a) N é obtida a partir de M pela troca das linhas 1 e 3.

(b) N é obtida a partir de M pela multiplicação da linha 2 por $\frac{1}{3}$.

(c) N é obtida a partir de M pela soma da linha 2 com -2 vezes a linha 1.

15. Verifique que $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$ para quaisquer números x, y, z. (Esse determinante é conhecido como *determinante de Vandermonde*.)

Algumas respostas:

3. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v_1} = [1\ \ 0\ \ 0]^T$; $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v_2} = [-2\ \ 1\ \ 3]^T$; $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{v_3} = [0\ \ 1\ \ -1]^T$.

4. Matriz A: $\lambda_1 = 3$ e $E_3 = \text{ger}([1\ \ 0\ \ 0]^T)$; $\lambda_2 = 1$ e $E_1 = \text{ger}([2\ \ -1\ \ 0]^T)$; $\lambda_3 = 1$ e $E_0 = \text{ger}([3\ \ -2\ \ 1]^T)$; $\text{Det}(A) = 0$; $\text{Tr}(A) = 4$.

Matriz B: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $E_2 = \text{ger}([1\ \ 1\ \ 1]^T, [1\ \ 0\ \ 1]^T)$; $\lambda_3 = -2$ e $E_{-2} = \text{ger}([1\ \ 0\ \ -1]^T)$; $\text{Det}(A) =$ -8; $\text{Tr}(A) = 2$.

5. $\lambda_1 = a + b$, $\mathbf{v_1} = [1\ \ 1]^T$; $\lambda_2 = a - b$, $\mathbf{v_2} = [1\ \ -1]^T$.

7. (c) Seja $\mathbf{v} \neq 0$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Então $B\mathbf{v} = (A + kI)\mathbf{v} = A\mathbf{v} + k\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + k\mathbf{v} = (\lambda + k)\mathbf{v}$.

11. $\det(A) = 4$; $\det(B) = abcd$; $\det(C) = -56$

13. (b) Se $\det(A^3) = \det(I)$ então $(\det(A))^3 = 1$. Portanto, $det(A) = 1$. (c) Sabemos que, em geral, $\det(M) = \det(M^T)$. Como $A = -A^T$, $\det(A) = (-1)^n \det(A)$, ou seja, $[1 - (-1)^n]\det(A) = 0$. Logo, se n for par, $\det(A)$ pode ser qualquer número. Se n for ímpar, $\det(A) = 0$.

14. $\det(M) = 126$. (a) $\det(N) = -126$ (b) $\det(N) = 42$ (c) $\det(N) = 126$