MAT122 - Álgebra Linear - 2019 - Física Noturno

Lista de Exercícios 7: Matrizes Semelhantes e Diagonalização

1. Em cada caso, determine o polinômio característico, os autovalores e autovetores associados. Se A for diagonalizável, determine uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = D$ e exiba a matriz diagonal D:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

   (d) $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

2. É dada uma diagonalização da matriz A na forma $P^{-1}AP = D$. Determine quais são os autovalores de A e seus autovetores associados:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}$ é diagonalizável? Justifique.

4. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável? Justifique.

5. Prove que se A é diagonalizável então A^T é também diagonalizável.

6. Mostre que, para qualquer matriz quadrada A, os polonômios característicos de A e de A^T são iguais. Conclua que A e A^T têm os mesmos autovalores.

7. Dê um exemplo de matriz 2×2 tais que A e A^T tenham autoespaços distintos.

8. Prove que se $\lambda = 0$ é um autovalor de A então A não é inversível.

9. Seja A uma matriz inversível. Mostre que se λ é um autovalor de A então $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ é um autovalor de A^{-1}.

10. Suponha que λ seja um autovalor de A e seja α um número real qualquer. Mostre que $\lambda - \alpha$ é autovalor da matriz $A_1 = A - \alpha I$. Como você compara os autovetores de A e de A_1 associados a λ e a $\lambda - \alpha$ respectivamente?

11. Seja λ um autovalor de A. Mostre que:

    (a) para cada número real k, $k\lambda$ é um autovalor de kA.

    (b) λ^2 é um autovalor de A^2.

    (c) $3 - 2\lambda + 5\lambda^2$ é um autivalor de $3I - 2A + 5A^2$.

12. Mostre que a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é diagonalizável. Use esse fato para calcular A^{10}.

13. Se $A^{-1} = A$ e λ é um autovalor de A mostre que $\lambda = \pm 1$.

14. Se $A^2 = A$ e λ é um autovalor de A mostre que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

15. Determine todos os valores de k para os quais A é diagonalizável:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$

Algumas respostas:

1. (b) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$; autovalores -2 e 3; autovetores associados: $[\,1 \;\; 4\,]^T$ e $[\,-1 \;\; 1\,]^T$ respec.; $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Observe que a solução não é única. Poderíamos ter escolhido $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e, nesse caso, a matriz diagonal seria $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. *Confira!*

(d) $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$; autovalores 1, 2 e 3; autovetores associados: $[\,1 \;\; 1 \;\; 1\,]^T$, $[\,2 \;\; 1 \;\; 1\,]^T$ e $[\,1 \;\; 1 \;\; 2\,]^T$ respec.; $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(f) $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9$; autovalores 1, 3 e 3; autovetores associados: $[\,2 \;\; 1 \;\; 1\,]^T$, $[\,4 \;\; 0 \;\; 1\,]^T$ e $[\,-1 \;\; 1 \;\; 0\,]^T$; $P = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

4. Não é diagonalizável. Há dois autovalores: 3, de multiplicidade 1 e -1, de multiplicidade 2. Como o autoespaço associado a $\lambda = -1$ tem dimensão 1, não é possível formar uma base de $\mathbf{R}^3$ com 3 autovetores.

7. Confira quais são os autovetores de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e compare com os autovetores de A^T.

10. Se $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para algum $\mathbf{v}$ não nulo, então $A_1\mathbf{v} = (A - \alpha I)\mathbf{v} = A\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v} = (\lambda - \alpha)\mathbf{v}$. Portanto, se $\mathbf{v}$ é autovetor de A ele também é autovetor de A_1.

12. $A^{10} = \begin{bmatrix} 35.839 & -69.630 \\ -11.605 & 24.234 \end{bmatrix}$

15. (b) $k = 0$ (d) qualquer k real (f) qualquer k real, pois o polinômio característico é $-\lambda^3 + (2+k)\lambda^2$; os autovalores são $\lambda_1 = 0$ (multiplicidade 2) e $\lambda_2 = k + 2$. Para qualquer k sempre será possível encontrar 3 autovetores LI, a saber $v_1 = [\,-k, \;\; 0 \;\; 1\,]^T, v_2 = [\,-1 \;\; 1 \;\; 0\,]^T, v_3 = [\,1 \;\; 1 \;\; 1\,]^T$, o que garante que sempre será possível encontrar uma matriz P inversível tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal.

Exercícios complementares

1. Sejam $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix}$ duas matrizes diagonais. Determine $D + E$, DE, $\det(D)$ e D^k para $k \geq 1$ inteiro. Justifique sua resposta.

2. Sejam A e B matrizes quadradas. Mostre que:

   (a) $A \sim A$ para toda matriz quadrada A. (propriedade reflexiva)

   (b) Se $A \sim B$ então $B \sim A$. (propriedade simétrica)

   (c) Se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$. (propriedade transitiva)

   Sugestão para (c): Sabemos que existem matrizes inversíveis P e Q tais que $A = P^{-1}BP$ e $B = Q^{-1}CQ$. Substituindo B tem-se $A = P^{-1}(Q^{-1}CQ)P = (P^{-1}Q^{-1})C(QP)$. Como o produto de matrizes inversíveis é uma matriz inversível e $P^{-1}Q^{-1} = (QP)^{-1}$, escrevendo $R = QP$, podemos concluir que $A = R^{-1}CR$ e, portanto, $A \sim C$.

Definição: Uma relação que satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva é chamada **relação de equivalência**.
O exercício anterior nos mostra que a semelhança de matrizes é uma relação de equivalência.

3. Prove que se A e B matrizes quadradas semelhantes então $\det(A) = \det(B)$.

Definição: O **traço** de uma matriz $A = (a_{ij})$ de ordem $n \times n$ é a soma dos elementos de sua diagonal principal, isto é $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

4. Prove que se A e B são matrizes $n \times n$ então:

   (a) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$

   (b) $\operatorname{tr}(kA) = k \operatorname{tr}(A)$ para todo número k

   (c) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

5. Prove que se A e B matrizes quadradas semelhantes então $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.
   Sugestão: tente usar o item (c) do exercício anterior!

6. Suponha que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sejam os autovalores (podendo incluir repetições) da matriz A de ordem $n \times n$. Prove que

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

   Sugestão: o polinômio característico de A pode ser escrito na forma $(-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$. Encontre o termo independente e o coeficiente de λ^{n-1} desse polinômio.