MAT122 - Álgebra Linear - 2019 - Física Noturno

Lista de Exercícios 8

Parte A: Aplicação de diagonalização de matrizes para resolver Sistemas de Equações Diferenciais Lineares

1. Encontre a solução geral para os sistemas de equações diferenciais indicados. Depois encontre a solução particular que satisfaz as condições iniciais.

(a) $\begin{cases} x' = x + 3y, & x(0) = 0 \\ y' = 2x + 2y, & y(0) = 5 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x' = x + y, & x(0) = 1 \\ y' = x - y, & y(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x' = y - z, & x(0) = 1 \\ y' = x + z, & y(0) = 0 \\ z' = x + y, & z(0) = -1 \end{cases}$

2. Seja $x = x(t)$ uma função diferenciável de ordem 2 em $\mathbb{R}$ e considere a equação diferencial de segunda ordem $x'' + ax' + bx = 0$

   (a) Faça a mudança de variáveis $y = x' + ax$ e transforme a equação dada em um sistema de duas equações diferenciais lineares em y e x.

   (b) Encontre a solução geral da equação $x'' - 5x' + 6x = 0$.

Parte B: Ortogonalidade

3. Encontre todos os valores de a e b para os quais o conjunto de vetores $\{[\,1 \quad 2 \quad 3\,]^T, [\,4 \quad 1 \quad -2\,]^T, [\,a \quad b \quad 3\,]^T\}$ seja um conjunto ortogonal.

4. Mostre que a matriz $M = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{7\sqrt{5}} & -\frac{15}{7\sqrt{5}} & \frac{2}{7\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

5. Seja Q uma matriz $n \times n$ ortogonal e $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_k}\}$ um conjunto ortonormal. Mostre que o conjunto $\{Q\mathbf{v_1}, Q\mathbf{v_2}, \ldots, Q\mathbf{v_k}\}$ é ortonormal.

6. Determine uma base para o complemento ortogonal do subespaço W em cada caso:

   (a) W é a reta de $\mathbb{R}^2$ de equação $2x - 5y = 0$.

   (b) W é a reta de $\mathbb{R}^3$ com equações paramétricas $x = t,\ \ y = 2t,\ \ z = -t$.

   (c) $W = \text{ger}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4$.

7. Decomponha o vetor $\mathbf{v}$ como soma de um vetor em W com um vetor em $W^\perp$, sendo

$$W = \text{ger}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

8. Aplique o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortogonal para $W = \text{ger}\,\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}\}$, sendo $\mathbf{x_1} = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T, \mathbf{x_2} = [1\ \ 1\ \ 1\ \ 0]^T, \mathbf{x_3} = [0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]^T$

9. Encontre uma matriz simétrica com autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$ e autoespaços

$$E_1 = \text{ ger}\,\{[1\ 1\ 0]^T, [1\ 1\ 1]^T\},\ \ E_{-2} = \text{ ger}\,\{[1\ \ -1\ \ 0]^T\}$$

10. Determine uma diagonalização ortogonal para a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

11. Prove que se A é uma matriz ortogonal e simétrica então $A^2 = I$.

Parte C: Equações quadráticas

12. Use uma *translação* de eixos para colocar a cônica dada na posição padrão. Identifique o gráfico, dê sua equação no sistema de coordenadas transladado e esboce a curva:

   (a) $4x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 6 = 0$

   (b) $2y^2 - 3x^2 - 18x - 20y + 11 = 0$

   (c) $2y^2 + 4x + 8y = 0$

13. Use uma *rotação* de eixos para colocar a cônica dada na posição padrão. Identifique o gráfico, dê sua equação no sistema de coordenadas rotacionado e esboce a curva:

   (a) $x^2 + xy + y^2 = 6$

   (b) $4x^2 + 6xy - 4y^2 = 5$

14. Identifique a cônica e dê sua equação na forma reduzida.

   (a) $3x^2 - 4xy + 3y^2 - 28\sqrt{2}\,x + 22\sqrt{2}\,y + 84 = 0$

   (b) $2xy + 2\sqrt{2}\,x - 1 = 0$

   (c) $x^2 - 2xy + y^2 + 2\sqrt{2}\,x - 2\sqrt{2}\,y + 6 = 0$

15. Identifique a quádrica e dê sua equação na forma reduzida.

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4yz = 1$

   (b) $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4xy - 2xz + 2yz - x + y + x = 0$

   (c) $11x^2 + 11y^2 + 14z^2 + 2xy + 8xz - 8yz - 12x + 12y + 12z = 6$

Algumas respostas:

1. (a) Solução geral: $x(t) = -3C_1e^{-t} + C_2e^{4t}, y(t) = 2C_1e^{-t} + C_2e^{4t}$; Solução particular: $x(t) = -3e^{-t} + 3e^{4t}, y(t) = 2e^{-t} + 3e^{4t}$; (b) Solução geral: $x(t) = (1+\sqrt{2}C_1e^{\sqrt{2}t} + (1-\sqrt{2}C_2e^{-\sqrt{2}t}, y(t) = C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}$; Solução particular: $x(t) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}e^{\sqrt{2}t} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}t}, y(t) = \frac{\sqrt{2}}{4}e^{\sqrt{2}t} - \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}t}$; (c) Solução geral: $x(t) = -C_1 + C_3e^{-t}, y(t) = C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t}, z(t) = C_1 + C_2e^t$; Solução particular: $x(t) = -2 - e^{-t}, y(t) = -2 + e^t + e^{-t}, z(t) = -2 + e^t$.

2. (b) $x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$

4. Sugestão: calcule $M^T M$.

6. (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}$

9. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. (a) Elipse. Fazendo $u = x - 1; v = y + 3$ a equação reduzida fica $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{8} = 1$; (b) Hipérbole $\frac{v^2}{6} - \frac{u^2}{4} = 1$ para $u = x + 3, v = y - 5$; (c) Parábola, $u = -\frac{1}{2}v^2$ para $u = x; v = y + 2$.

13. (a) Elipse, $\frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{12} = 1$; (b) Hipérbole, $u^2 - v^2 = 1$

14. (a) Elipse, $\frac{s^2}{50} + \frac{t^2}{10} = 1$; (b) Hipérbole, $s^2 - t^2 = 1$; (c) Duas retas (cônica degenerada)

15. (a) Hiperbolóide de 1 folha, $u^2 - v^2 + 3w^2 = 1$; (b) Parabolóide hiperbólico, $u = -\sqrt{3}v^2 + \sqrt{3}w^2$; (c) Elipsóide, $3r^2 + s^2 + 2t^2 = 4$