MAT122 - Álgebra Linear - 2019 - Física Noturno

Lista de Exercícios 9 : Espaços Vetoriais e Subespaços

1. Verifique se o conjunto dado munido das operações de adição e de multiplicação por escalar especificadas é um espaço vetorial. Se não for, especifique qual o axioma que não é satisfeito nesse caso.
   (a) O conjunto de todos os vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ tais que $xy \geq 0$, com as operações usuais de adição de vetores e multiplicação por escalar.
   (b) $\mathbb{R}^2$, munido da operação usual de adição de vetores, mas a multiplicação por escalar dada por
   $$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ y \end{bmatrix}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
   (c) O conjunto de todos os números reais estritamente positivos com adição $\oplus$ dada por $x \oplus y = xy$ e multiplicação por escalar $\odot$ dada por $\lambda \odot x = x^c$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
   (d) O conjunto das matrizes $n \times n$ antissimétricas, com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação por escalar.

2. Verifique se o conjunto S é subespaço do espaço vetorial V nos seguintes casos:
   (a) $S = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : 2a_{11} + 3a_{22} = 0\}, \quad V = M_2(\mathbb{R})$
   (b) $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(4) = 0\}, \quad V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$
   (c) $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-1) = f(3)\}, \quad V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$
   (d) $S = \{[x \quad y \quad z]^T : x + z = 5\}, \quad V = \mathbb{R}^3$
   (e) $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(0) = 1\}, \quad V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$
   (f) $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}, \quad V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$
   (g) $S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\}, \quad V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$

3. Mostre que o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são contínuas e tais que $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 0$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

4. Verifique que as funções periódicas de mesmo período τ formam um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

5. Sejam S_1 e S_2 subespaços de um espaço vetorial V.
   (a) Mostre que $S_1 \cap S_2$ é um subespaço de V.
   (b) Dê um exemplo que mostre que $S_1 \cup S_2$ *não é* um subespaço de V.

6. Sejam S_1 e S_2 subespaços de um espaço vetorial V e defina a soma $S_1 + S_2 = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in S_1, \mathbf{v} \in S_2\}$
   (a) Determine $S_1 + S_2$ no caso em que $V = \mathbb{R}^3$, S_1 é o eixo x e S_2 é o eixo z.
   (b) Prove que $S_1 + S_2$ é um subespaço de V[1].

Algumas respostas:

1. (a) e (b) Não são espaços vetoriais; (c) e (d) São espaços vetoriais.

2. (a), (b), (c) são subespaços; (d) e (e) não são subespaços.

[1] É possível provar que a soma $S_1 + S_2$ é o menor subespaço de V que contém S_1 e S_2