1^a Lista de Cálculo I - Escola Politécnica - 2003
Limite de Funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x-9}{x-3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0{,}001}\dfrac{x}{|x|}$

4) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+x-56}{x^2-11x+28}$ 5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$

7) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-x^2+7x-3}{2-x+5x^2-4x^3}$ 9) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

10) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$ 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$ 12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

13) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg}(3x)\ \operatorname{cossec}(6x)$ 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ 15) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{x-\pi/2}$

16) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ 17) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$ 18) $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$

19) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2-x}{(1-x)^3}$ 20) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ 21) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\operatorname{sen}(x^2-3x+2)}{x-1}$

22) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+x})$ 23) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$ 24) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1})$

25) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$ 26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$ 27) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$

Resp.: 1) -5; 2) 3; 3) 1; 4) 5; 5) 4; 6) $\dfrac{1}{5}$; 7) $+\infty$; 8) $\dfrac{-1}{2}$; 9) 0;10) $\dfrac{1}{3}$; 11) 1; 12) 1; 13) $\dfrac{1}{2}$; 14) $\dfrac{1}{2}$; 15) -1; 16) 1; 17) $\nexists$; 18) $-\infty$; 19) $-\infty$; 20) -1; 21) -1; 22) $-\dfrac{1}{2}$; 23) 1; 24) $-\infty$; 25) 0; 26) 0; 27) $+\infty$.

2. Seja $f : I\!R \to I\!R$ tal que $|f(x)| \le 2|x|,\ \forall x \in I\!R$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^3)}{x}$. Resp.: 0

3. Seja $f : I\!R \to I\!R$ tal que $1+x^2+\dfrac{x^6}{3} \le f(x)+1 \le \sec x^2+\dfrac{x^6}{3},\ \forall x \in I\!R$.

   a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\cos\left(\dfrac{1}{x+x^2}\right)$

   Resp.: a) 0 e b) 0.

4. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função.

   (a) Assumindo que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$, calcule $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x}$.

(b) Assumindo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, calcule $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(c) Assumindo que $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^2+x} = +\infty$, calcule $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

5. 5. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty} x \underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0} = \lim_{x\to+\infty}(x\cdot 0) = 0$$

6. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f : I\!R \to I\!R$ é uma função limitada e positiva e se $g : I\!R \to I\!R$ é uma função tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ então $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty$.

   (b) Se $f : I\!R \to I\!R$ é uma função limitada e $g : I\!R \to I\!R$ é uma função tal que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ então $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)] = +\infty$.

7. Dê exemplos de funções f e g tais que:

   (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   (b) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)] = 1$.

   (c) $\lim_{x\to 0} f(x)-g(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

   (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim_{x\to 0}[f(x)-g(x)] \neq 0$.

8. Mostre que se $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e se g é limitada então $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = 0$.

9. Analise a resolução abaixo.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}^{\to 1}-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x^2} = 0.$$

   (a) Usando uma calculadora, determine o valor de $\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$ para alguns valores pequenos de x (por exemplo, $x = 0{,}1$ e $x = 0{,}01$).

(c) É possível mostrar com a teoria a ser estudada mais adiante neste curso que:

$$x - \frac{x^3}{6} \le \operatorname{sen} x \le x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

para todo $x \ge 0$. Usando essa desigualdade, calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

Continuidade de Funções

1. Determine o conjunto dos pontos em que a função f é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4), & se \quad x > 2 \\ x^2 + x - 6, & se \quad x < 2 \\ 0, & se \quad x = 2 \end{cases}$$

Resp.: $I\!R$

2. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f écontínua. Explique:

a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3}, & se x \neq 3 \\ 2, & se x = 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & se \quad x \neq 3 \\ 1, & se x = 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & se x \neq 1 \\ 0, & se x = 1 \end{cases}$

Resp.: a) $I\!R \setminus \{-2\}$;b) $I\!R \setminus \{3\}$; c) $I\!R \setminus \{3\}$; d)$I\!R \setminus \{1\}$.

3. Determine L para que a função dada seja contínua.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x}, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ L, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x}, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ L, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$

Resp.: a) $L = 0$; b) $L = -1$.

4. Considere a função $f : I\!R \to I\!R$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-1}, & \text{se } x \neq 1, \\ 0, & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua em 1? Por que?

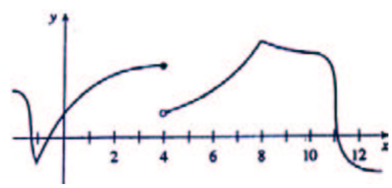
5. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função. Se $|f|$ é contínua então f é contínua.

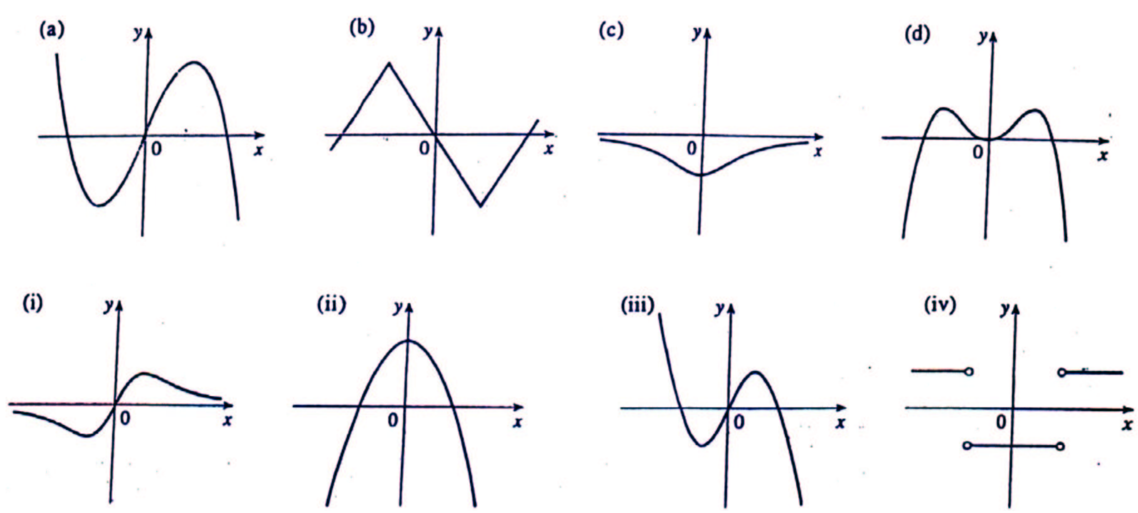
   (b) Se $f : I\!R \to I\!R$ e $g : I\!R \to I\!R$ são funções descontínuas em $x = 0$ então a função fg é descontínua em $x = 0$.

Derivadas

1. Considere o gráfico de f dado abaixo. Estabeleça, justificando, os pontos onde f não é diferenciável.



2. Associe os gráficos de cada função de (a) a (d) com os gráficos de suas respectivas derivadas de (i) a (iv).



3. Verifique se f é derivável em x_0, sendo:

   a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\dfrac{1}{x}, & se \quad x \neq 0, \\ 0, & se \quad x = 0. \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}}, & \text{se} \quad x > 1, \\ 1, & \text{se} \quad x \leq 1. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1.$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x, & \text{se} \quad x > 0, \\ x^5 + 4x^3, & \text{se} \quad x < 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0.$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}x^5, & \text{se} \quad x > 1, \\ x^4, & \text{se} \quad x \leq 1. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1.$

e) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0.$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{se} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0.$

Resp.: a) não; b) não; c) não; d) não; e) não; f) sim.

4. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}[(3+x)^2] - \operatorname{sen} 9}{x}$.

5. Calcule $f'(x)$:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; 2) $f(x) = \dfrac{2x^3+1}{x+2}$; 3) $f(x) = \dfrac{4x - x^4}{x^3+2}$;

4) $f(x) = x \operatorname{sen}(\sqrt{x^5} - x^2)$; 5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cos x}{(x^4 + \operatorname{tg}^2 x + 1)^2}$; 6) $f(x) = \sqrt{x \ \operatorname{tg}^2 x}$;

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \operatorname{cossec}\, x}{x^3 + 3x^2}$; 8) $f(x) = \sec\sqrt{x^2+1}$; 9) $f(x) = \dfrac{x^2 \ \operatorname{tg} x}{\sec x}$;

10) $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$; 11) $f(x) = \dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$; 12) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$;

13) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$; 14) $f(x) = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$; 15) $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen} x \cos x}$;

16) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} \operatorname{sen} x}{x^2 \cos(x^2)}$.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em um ponto $a \in \mathbb{R}$. Calcule, em termos de $f'(a)$,o limite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}.$$

7. Analise as seguintes "soluções" para a questão abaixo.

   Questão: Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x = 0$ e,em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações."solução" 1. $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$."solução" 2. Como a função $g(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo f não é derivável em $x = 0$."solução" 3. Temos $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Assim:
   $$f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0);$$
   como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$ então $f'(0) = 0$.

8. Ache os pontos da curva $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 10$ nos quais a tangente é horizontal. (Resp.: (1,-4) e (-2,50))

9. A reta $x = a$ intercepta a curva $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 3$ num ponto P e a curva $y = 2x^2 + x$ num ponto Q. Para que valor (ou valores) de a as tangentes e essas curvas em P e Q são paralelas? (Resp.: $a = 1$ ou $a = 3$)

10. Sejam f e g funções deriváveis em $I\!R$ tais que $f(g(x)) = x$, para todo $x \in I\!R$. Sabendo que $f'(1) = 2$ e $g(0) = 1$, calcule $g'(0)$. Resp.: 1/2

11. Sejam $f : I\!R \to I\!R$ uma função derivável até 2^a ordem e $g : I\!R \to I\!R$ dada por $g(x) = f(x + 2\cos 3x)$.

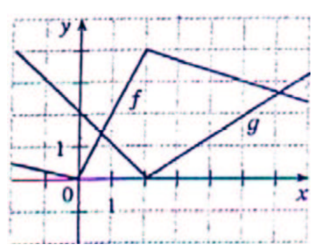
    a) Calcule $g''(x)$.

    b) Supondo $f'(2) = 1$ e $f''(2) = 8$, calcule $g''(0)$. Resp.: -10

12. Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$ $(a \neq 0)$ tem como interseção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

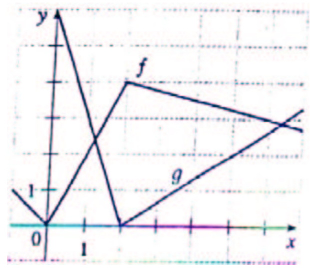
13. Sejam f e g duas funções cujos gráficos estão representados abaixo. Sejam $u(x) = f(x)g(x)$ e $v(x) = f(x)/g(x)$. Determine:

    a) $u'(1)$ b) $v'(5)$



14. Sejam f e g duas funções cujos gráficos estão representados abaixo. Sejam $u(x) = f(g(x))$,$v(x) = g(2 - x^2)$ e $w(x) = g(g(x))$. Determine, caso exista:

a) $u'(1)$ b) $v'(0)$ c) $w'(1)$



15. No videogame da figura 5, os aviões voam da esquerda para adireita segundo a trajetória de $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ e podem disparar suas balas na direção da tangente contra as pessoas ao longo do eixo Ox em $x = 1, 2, 3, 4$ e 5 (veja figura acima à direita). Determine se alguém será atingido se o avião disparar um projétil quando estiver em:

a) $(1, 2)$ b) $(3/2, 5/3)$ (Resp.: a) 3, b) não atinge)

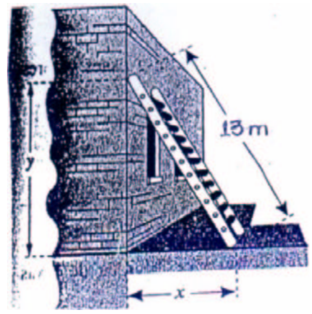
Taxa de Variação

1. Mostre que a taxa de variação do volume de uma esfera em relação ao seu raio é numericamente igual à área da esfera.

2. Uma mancha de óleo se alastra sempre circularmente. Ache a taxa de variação da área A da superfície da mancha em relação ao raio r do círculo para:

   a) r arbitrário b) $r = 200m$

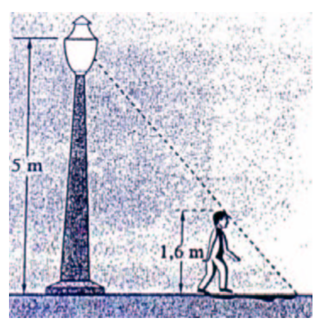
3. Uma escada de 13m está apoiada em uma parede. A base da escada está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede a uma taxa constante de 6m/min. Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo, encostado à parede, quando a base da escada está a 5m da parede? (Fig. 6) (Resp.: $2,5$m/min.)



4. Ao meio dia o barco A está 64km a oeste do barco B. O barco A navega para leste a 20km/h e o barco B navega para norte a 25km/h. Qual é a taxa de variação da distância entre os barcos às 13h e 12min? (Resp.: -1km/h)

5. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a altura. Sabendo que a areia é despejada a uma taxa de $0,01\text{m}^3/\text{min}$, qual a taxa de variação da altura do monte quando esta for de 3 metros? (Resp.: $4/2.700\pi\text{m}^3/\text{min.}$)

6. Uma luz está no alto de um poste de 5m, como na Fig. B. Um menino de $1,6$mde altura se afasta do poste à velocidade de $1,2$m/s. A que taxa se move a ponta de sua sombra quando ele está a 6m do poste? A que taxa aumenta o comprimento da sua sombra? Veja figura abaixo à esquerda. (Resp.: $1,764$m/s; $0,564$m/s)



7. A altura de um triângulo cresce a razão de 1cm/min e sua área aumenta à razão de $2\text{cm}^2/\text{min}$. Qual a taxa de variação da base do triângulo quando sua altura for 10cm e sua área 100cm^2? Resp.: $-1,6$cm/min

8. Aumentando-se a aresta de um cubo, ao longo do tempo, o seu volume cresce a uma taxa constante de $10\text{cm}^3/\text{min}$. Qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo no instante em que o comprimento de sua aresta é de 30cm? Resp.: $\frac{4}{3}$cm/min